UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

MÉMOIRE D'ÉTUDIANT

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

CRT-607

MINIMISATION DU NOMBRE DE RELAIS DANS LES TOURNÉES DES FACTEURS*

par

Jocelyn Bouliane

* Mémoire de maîtrise, département de Mathématiques appliquées, École Polytechnique de Montréal, dirigé par Gilbert Laporte et François Soumis.

Université de Montréal
Centre de recherche sur les transports - Publication #607
Septembre 1988

Dépôt légal - 1er trimestre 1989

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ce mémoire intitulé :

MINIMISATION DU NOMBRE DE RELAIS DANS LES TOURNÉES DES FACTEURS

présenté par : Jocelyn Bouliane

en vue de l'obtention du grade de : Maître es Sciences Appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

Monsieur J. Gauvin, Ph.D., président

Madame B. Jaumard, Ph.D.

Monsieur G. Laporte, Ph.D.

Monsieur F. Soumis, Ph.D.

SOMMAIRE

Ce mémoire de maîtrise traite du problème de ravitaillement en courrier des facteurs lors de l'exécution de leurs tournées de distribution du courrier. En effet, les facteurs canadiens ont une contrainte de capacité de courrier à respecter et ne peuvent transporter tout le courrier qu'ils vont distribuer au cours de la journée. Pour cette raison, on dissémine sur le territoire d'une succursale postale donnée des boîtes de ravitaillement contenant du courrier pour poursuivre la tournée.

Pour minimiser les coûts des opérations de livraison à ces boîtes, on a avantage à utiliser la même boîte pour plus d'un facteur lorsque c'est possible de façon à minimiser le nombre de boîtes de ravitaillement. À notre connaissance, ce problème n'avait pas encore été traité.

Dans la première partie de ce mémoire, on donne une description détaillée de ce problème, puis on le formule en un problème de recouvrement. On montre que cette formulation est la plus simple pour ensuite être résolue par une méthode heuristique. Par la suite, on utilise cette méthode heuristique pour résoudre un vrai problème de ravitaillement de facteurs (PRF) provenant de données de la succursale postale Henri-Bourassa à Montréal. Des résultats de l'application de la méthode heuristique à des PRF aléatoires suivent.

On donne ensuite une autre formulation du PRF. Cette nouvelle modélisation pourrait s'avérer fort utile lors de la résolution d'un PRF de très, très grande taille car on peut, pour le résoudre, utiliser la génération de colonnes.

Finalement, on montre que cette modélisation, relaxée de ses contraintes d'intégrité, est équivalente à la première, relaxée aussi de ses contraintes d'intégrité, qui consiste à faire du PRF un problème de recouvrement.

Mots-clés : boîtes de relais; localisation; recouvrement d'ensemble.

ABSTRACT

In Canada, relay boxes are located at various points of the postal network in order to supply letter carriers with an adequate amount of mail. This amount cannot exceed a prespecified bound.

In order to reduce the cost of delivering mail to relay boxes, their number must be minimized. This dissertation deals with this problem.

The problem is first described and formulated as a set covering problem. The problem is then solved by means of a heuristic algorithm and the approach is tested on data from the Henri-Bourassa postal station. An alternative formulation is then presented and compared with the first one. The linear relaxations of the two formulations are shown to be equivalent.

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier, en premier lieu, Messieurs Gilbert Laporte et François Soumis, mes directeurs de recherche. Ils m'ont appris à voir les choses sous un autre angle. De plus, leur présence a été un exemple constant d'enthousiasme, d'assiduité, de persévérance et d'excellence.

Je dois également exprimer toute ma gratitude à mon épouse Julie qui m'a toujours encouragé. Par son calme et sa joie de vivre elle a su créer le climat propice à la rédaction de ce mémoire.

Il faut aussi que je souligne l'intérêt constant que mes parents ont toujours porté à mes études; j'en éprouve beaucoup de fierté.

Mentionnons que Mademoiselle Lucie L'Heureux m'a été d'un grand secours car c'est à elle que l'on doit tout le travail d'édition du manuscrit.

Enfin, je remercie le GERAD pour son soutien financier ainsi que Monsieur Philippe-Éric Landry de la Société canadienne des Postes pour m'avoir soumis le problème original traité dans ce mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE	iv
ABSTRACT	vi
REMERCIEMENTS	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES TABLEAUX	xi
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION AU PROBLÈME	1
CHAPITRE 2 : DESCRIPTION DU PROBLÈME	5
2.1 - Exemple d'un mini-PRF avec 3 mini-tournées	9
2.2 - Méthode heuristique simple pour le PRF	11
2.3 - Modélisation du PRF en un problème de recouvrement	18
2.3.1 - Complexité du PRF	21
2.3.2 - Cas particulier du PRF	21
2.3.3 - Problème de recouvrement : cas particulier du PRF	23
2.4 - Bornes	24
2.5 - Techniques de réduction du problème de recouvrement	24
2.5.1 - Cas où une contrainte ne contient qu'un seul coefficient non nul	25
2.5.2 - Dominance de ligne	26
2.5.3 - Autres résultats généraux	26
2.5.4 - Technique de réduction par le point extrême	27
2.5.5 - Technique de réduction de la solution arrondie	31
2.6 - Méthode heuristique pour résoudre le PR	35

Page

CHAPITRE 3 : RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX. 37

3.1 - Données du problème. 37

3.2 - Conversions préliminaires du fichier du réseau du territoire H2B 37

3.3 - Résolution du problème 38

3.4 - Analyse de sensibilité 39

3.5 - Génération de problèmes aléatoires 41

CHAPITRE 4 : AUTRE MODÉLISATION DU PRF. 44

4.1 - Rappel sur la génération de colonnes 47

4.2 - Nature du sous-problème lorsque le PRF est sous la forme du modèle 2. 53

CHAPITRE 5 : RELATION ENTRE LE MODÈLE 2 ET LE MODÈLE 1. 58

CONCLUSION. 69

BIBLIOGRAPHIE 71

LISTE DES FIGURES

Page

FIGURE 1 : Exemple d'une tournée de facteur. 7

FIGURE 2 : Autre exemple - deux tournées pour illustrer la notion de couverture 8

FIGURE 3 : Exemple d'un mini-PRF avec 3 mini-tournées. 9

FIGURE 4 : PRF original. 13

FIGURE 5 : PRF_1. 14

FIGURE 6 : PRF_2. 16

FIGURE 7 : PRF_3. 17

FIGURE 8 : PRF_4. 18

FIGURE 9 : Exemple d'un PRF de capacité infinie avec des tournées cycliques. 22

FIGURE 10 : Exemple d'un coin de rue normal 37

FIGURE 11 : Tournée contenant un cycle. 44

FIGURE 12 : Tournée linéaire après avoir dédoublé un noeud. 44

FIGURE 13 : Tournée 54

FIGURE 14 : Chemins possibles contenus dans la tournée de la figure 13 55

FIGURE 15 : Tournée 59

FIGURE 16 : Sur-arcs associés à la tournée de la figure 15. 59

FIGURE 17 : Les flots ou voisinage du noeud ℓ 64

FIGURE 18 : Réudction du flot à travers la coupe coupe w_ℓ^i 66

LISTE DES TABLEAUX

Page

TABLEAU 1 : Résultats de l'analyse de sensibilité 40

TABLEAU 2 : Résultats de l'application de l'algorithme sur des PRF aléatoires. 42

CHAPITRE 1

INTRODUCTION AU PROBLÈME

Au Canada, dans la plupart des régions urbaines, le courrier est livré à domicile par un facteur qui se déplace à pied. Chaque facteur parcourt la même tournée chaque jour. Il commence le matin son itinéraire avec un sac rempli de courrier. Pour des raisons de capacité physique et de convention collective, le facteur ne porte jamais plus de 35 livres (15,8 kg) et il doit donc y avoir des points de ravitaillement à des endroits appropriés le long de son parcours de façon à ce qu'il ne manque jamais de courrier et qu'il ne porte jamais plus que la capacité maximale permise. Ces points de ravitaillement, ou relais, sont des boîtes où on aura, avant que le facteur n'y arrive, livré le courrier nécessaire à la poursuite de sa tournée.

Toujours au Canada, les postes sont administrativement divisées en succursales postales, chacune ayant son dépôt. Chaque succursale postale a un territoire où elle doit voir à ce que le courrier soit bien distribué par les facteurs qui y sont affectés. Pour cela, elle doit s'occuper elle-même des opérations de livraison du courrier du dépôt aux boîtes à relais disséminées sur son territoire.

Le problème est que ces opérations sont coûteuses : il faut entretenir des camions de livraison, payer des chauffeurs, effectuer des tris et de la manutention. Pour cela, nous voudrions minimiser le nombre de boîtes à

relais, pas parce qu'elles coûtent cher mais parce que moins il y en aura, moins on effectuera d'opérations de livraison et plus on diminuera les coûts de livraison.

Il faut comprendre que la succursale postale est dans un milieu urbain plutôt homogène et on suppose qu'en minimisant le nombre de boîtes à relais (ravitaillement), on minimisera aussi la distance totale parcourue pour effectuer les livraisons.

Comme il arrive souvent que deux ou plusieurs tournées de facteurs passent par le même point et même qu'une tournée distincte forme un cycle, on voit tout de suite qu'il doit exister des choix plus judicieux que d'autres quant à la détermination de l'emplacement des boîtes à relais sur le territoire d'une succursale postale donnée.

Et on en arrive à la formulation de base du problème qui nous préoccupe : pour une succursale postale donnée, chacune de ses tournées de facteur étant connue, on veut placer un nombre minimal de boîtes à relais tout en respectant les contraintes suivantes : un facteur ne doit jamais porter plus que la capacité permise (dans notre cas, 35 livres) et il ne doit pas se retrouver à court de courrier entre deux boîtes à relais. On a aussi un estimé du volume de courrier pour chaque domicile dont la succursale s'occupe.

Ce problème est un cas particulier du problème de "localisation-recouvrement" que l'on rencontre surtout lorsqu'il est question de déterminer les emplacements des

points à partir desquels une organisation va desservir une population (comme par exemple où mettre les postes d'incendie dans une ville). Church et Weaver (1986) ont déjà écrit un article portant sur ce problème et d'autres similaires et y donnent l'évolution de leurs techniques de résolution. À notre connaissance, Toregas et ReVelle (1972) furent les premiers à élaborer un modèle pour la "localisation-recouvrement".

Christofides (1975) a proposé un algorithme de type "recherche dans un arbre" pour résoudre le problème de recouvrement mais lui-même le qualifie de "primitif" et de "peu efficace même pour résoudre un problème de taille modérée". Il l'améliore quelque peu par le calcul de bornes inférieures. Comme le problème du ravitaillement des facteurs est de grande taille, cet algorithme ne peut nous être utile.

Le problème de recouvrement est un programme linéaire en variables entières et une autre approche serait de le résoudre en se servant de la programmation linéaire et d'une technique de séparation et d'évaluation progressive. C'est ce qu'ont fait Toregas et ReVelle (1972) en ajoutant aussi quelques techniques de réduction. Mais là encore cette façon de faire peut être longue et inadéquate lorsqu'on s'attaque à un problème de grande taille à cause de la procédure de séparation et d'évaluation progressive.

Il semble que la façon la plus appropriée de traiter un problème de recouvrement de grande taille est de mettre au point un heuristique puissant et fiable qui nous fournira une solution toujours assez près de la solution optimale. C'est la façon de procéder de Vasko et Wilson (1984).

Toujours dans le même sens, Salkin (1975) a démontré certains résultats qui, mis ensemble, nous fournissent un heuristique puissant pour résoudre les problèmes de recouvrement de grande taille.

Dans les quelques pages qui vont suivre, après la description et la classification de ce problème, nous allons présenter cet heuristique ainsi que les résultats qu'il nous a donnés à partir de données réelles. Puis, nous développons une autre formulation au problème et nous donnons l'équivalence entre ces deux modèles.

CHAPITRE 2

DESCRIPTION DU PROBLÈME

Définition : on appelle capacité le poids maximum de courrier qu'un facteur peut porter.

Définition : on appelle tournée, dans le graphe ayant pour noeuds les sites possibles des relais une suite d'arcs orientés devant être parcourus par un facteur dans un ordre fixé. Pour deux arcs consécutifs de cette suite, le noeud d'arrivée du premier arc doit être le noeud de départ du second arc. De plus sur chaque arc la demande est connue (la quantité de courrier à y être livré) et ne doit pas excéder la capacité.

Soit un graphe orienté dans lequel chaque arc appartient à une tournée.

Chaque tournée est parcourue, dans son ordre, par un et un seul facteur. Sur chaque arc d'une tournée il y a la demande que le facteur doit satisfaire. À chaque noeud du graphe on peut mettre un relais où les facteurs qui y passent pourront se ravitailler en courrier.

Le facteur commence sa tournée avec une certaine quantité de courrier ne dépassant pas la capacité. Sur chaque arc qu'il parcourt, il doit satisfaire la demande et il épuise ainsi la quantité de courrier avec lequel il est parti. Les contraintes sont qu'il ne doit pas tomber à court de courrier sur un arc et il ne doit jamais porter plus que la capacité permise.

L'objectif à minimiser est le nombre de relais où les facteurs peuvent se ravitailler.

Nous appellerons ce problème "PRF" (problème de ravitaillement des facteurs).

Pour le reste de ce mémoire, nous prendrons la convention suivante : dans un graphe représentant un PRF, le premier nombre au-dessus d'un arc sera la demande sur cet arc tandis que le second sera le numéro de cet arc.

Si on considère un noeud et une tournée qui y passe (il y en a toujours au moins une) et qu'on y mette un relais, alors avec ce ravitaillement le facteur peut continuer sa tournée pour un certain nombre d'arcs. En fait, à partir de ce noeud où il y a un relais, il peut parcourir les arcs consécutifs à ce noeud dont la somme des demandes n'excède pas la capacité.

Définition : nous dirons qu'un arc "a" d'une tournée i est couvert par un noeud si le fait d'avoir un relais à ce noeud nous permet de satisfaire entièrement la demande sur cet arc tout en satisfaisant les demandes des autres arcs de la tournée qui sont entre ce noeud et l'arc "a".

Définition : nous appellerons couverture d'un noeud l'ensemble de tous les arcs couverts par ce noeud. Nous noterons la couverture du noeud i par C(i) et la cardinalité de C(i) par $|C(i)|$.

Notons que la couverture d'un noeud peut contenir des arcs de plusieurs tournées. En effet, si par un noeud

donné il passe par exemple trois tournées, alors la couverture de ce noeud contiendra au moins un arc de chacune de ces trois tournées car à partir d'un relais placé à ce noeud, on peut continuer à parcourir ces trois tournées.

Exemple :

Soit la tournée suivante (figure 1), avec une capacité de 5. Le premier nombre au-dessus de chaque arc est la demande, le second est le numéro de l'arc.

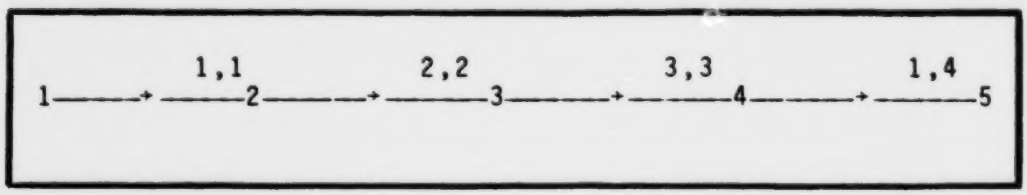

Figure 1 : Exemple d'une tournée de facteur

Alors le noeud 1 couvre les arcs 1 et 2 car la somme des demandes y est de $1 + 2 = 3 < 5$ et on ne peut pas couvrir d'autres arcs avec un relais au noeud 1 car la demande sur le prochain arc, l'arc 3, est de 3 et on aurait alors une demande totale de $1 + 2 + 3 = 6 > 5$.

De même, seulement les arcs 2 et 3 sont couverts par le noeud 2; seulement les arcs 3 et 4 sont couverts par le noeud 3; seulement l'arc 4 est couvert par le noeud 4. Le noeud 5 ne couvre aucun arc.

Autre exemple :

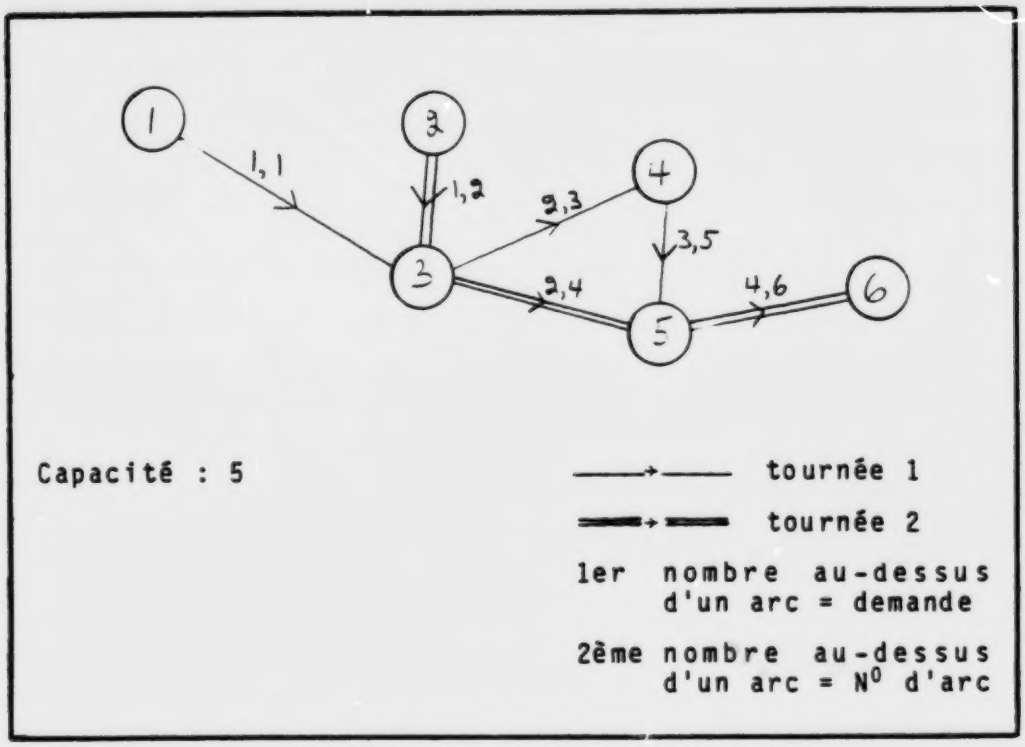

Figure 2 : Autre exemple - deux tournées pour illustrer la notion de couverture

Dans cet exemple, on a :

noeud	ensemble des arcs formant la couverture de ce noeud
1	{1,3}
2	{2,4}
3	{3,4,5}
4	{5}
5	{6}
6	∅

Notons que la couverture du noeud 3 contient des arcs des tournées 1 et 2 car ces deux tournées passent par le noeud 3. Notons aussi qu'un noeud par lequel il ne passe qu'une tournée a forcément une couverture qui ne contient que des arcs de cette tournée. Par exemple, avec un ravitaillement au noeud 4, on ne peut satisfaire que des demandes sur des arcs de la tournée 1 car seulement le facteur de la tournée 1 peut se ravitailler au noeud 4.

2.1 Exemple d'un mini-PRF avec 3 mini-tournées

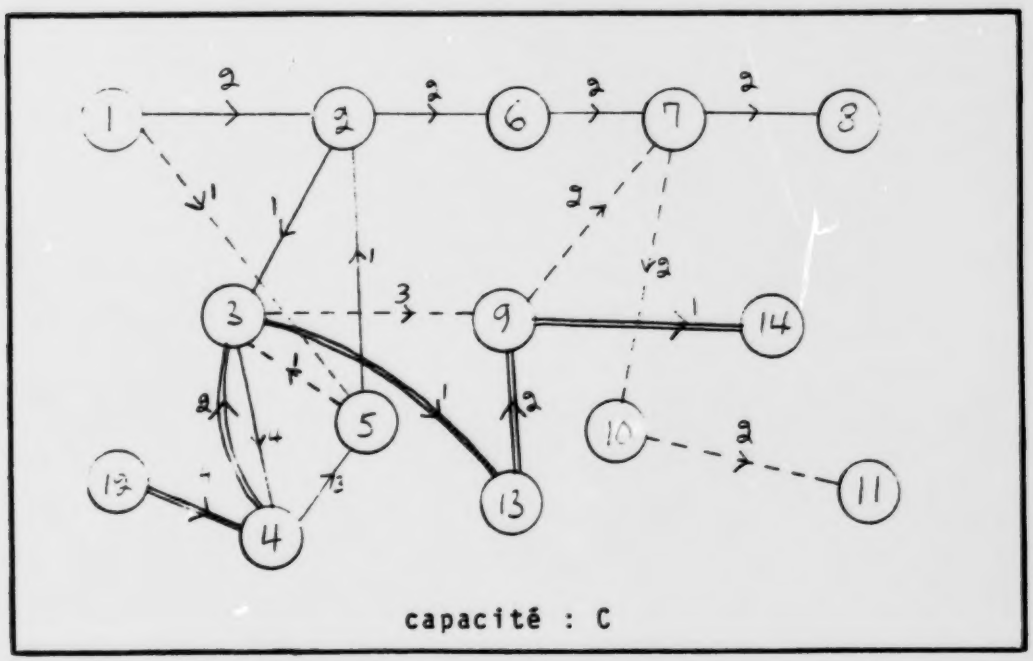

Figure 3 : Exemple d'un mini-PRF avec 3 mini-tournées

* Légende 0 : noeud (site potentiel pour un relais)

——→—— : tournée 1 Elle fait dans l'ordre les noeuds 1, 2, 3, 4, 5, 2, 6, 7, 8

— + — : tournée 2 Elle fait dans l'ordre les noeuds 1, 5, 3, 9, 7, 10, 11

═══+═══ : tournée 3 Elle fait dans l'ordre les noeuds 12, 4, 3, 13, 9, 14

* C : capacité maximale qu'un facteur peut porter.

* : Le nombre dans le noeud est le numéro de ce noeud.

* : Le nombre au-dessus d'un arc est la quantité de courrier qu'il faut livrer sur cet arc. Ce nombre doit forcément être plus petit ou égal à la capacité C, et il sera appelé demande ci-après.

Avec ce petit exemple, voyons quelques solutions réalisables si la capacité de chaque facteur est de 5.

Solution 1 : La solution la plus simpliste serait de mettre un relais à chaque noeud. Cette solution coûterait 14 (car il y a 14 noeuds). On voit déjà que l'on peut avoir une meilleure solution en éliminant les trois relais de la fin des trois tournées qui sont inutiles puisque les tournées y prennent fin. On aurait ainsi un coût de 11.

Solution 2 : Elle consiste à mettre un relais aux noeuds 1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 12 et 13. Une solution

qui coûte 9. Dans cette solution, en plaçant des relais aux noeuds 1, 3, 4, 2 et 7, on s'assure de ne pas être à court de courrier entre deux noeuds 1, 9 et 10 dans la tournée 2 et 12 et 13 pour la tournée 3.

Par exemple, avec une capacité de 5, on voit que la tournée 1 est bien couverte. En effet, entre les noeuds 1 et 3 on a deux arcs dont la somme des demandes est $2 + 1 = 3 < 5$; entre les noeuds 3 et 4 on a un arc avec une demande de $4 < 5$; entre les noeuds 4 et 2 on a deux arcs dont la somme des demandes est $3 + 1 = 4 < 5$; entre les noeuds 2 et 7 on a deux arcs dont la somme des demandes est de $2 + 2 = 4 < 5$; finalement, après le noeud 7 il n'y a qu'un arc avec une demande de $2 < 5$.

Solution 3 : Elle consiste à mettre un relais aux noeuds 1, 2, 3, 4, 7 et 12. Une solution qui coûte 6. Ici le noeud 2 sert deux fois à la tournée 1, les noeuds 1 et 7 servent aux tournées 1 et 2 et le noeud 3 sert aux tournées 2 et 3. (La solution 3 est la solution optimale).

2.2 Méthode heuristique simple pour le PRF

Soit un PRF comportant n tournées. Initialisation : i = 0. Aller à l'étape 1.

Étape 1 : choisir le noeud de début de chaque tournée et y mettre un relais. Aller à l'étape 2.

Étape 2 : enlever du graphe du PRF original tous les arcs appartenant à la couverture d'un des noeuds de départ. Aller à l'étape 3.

Étape 3 : si après l'étape 2 il reste un ou des noeuds qui ne sont accrochés à aucun arc, on enlève ces noeuds. À ce moment-ci, on a un nouveau PRF avec possiblement des tournées coupées. Aller à l'étape 4.

Étape 4 : si dans le nouveau PRF obtenu il n'y a plus aucun noeud, c'est fini, on a une solution réalisable. Sinon i:= i + 1 et le nouveau PRF obtenu s'appelle PRF_i (cependant, PRF_i peut comporter des tournées coupées). Aller à l'étape 5.

Étape 5 : dans PRF_i, on choisit le noeud i tel que $|C(i)|$ est le plus grand possible. S'il existe deux (ou plusieurs) noeuds i et j tels que $|C(i)| = |C(j)|$ et $|C(i)| \geq |C(k)|$ pour tout noeud ℓ_i tel que $|C(\ell_i)| = |C(i)|$. Aller à l'étape 6.

Étape 6 : enlever du graphe PRF_i tous les arcs appartenant à $C(\ell_i)$. Aller à l'étape 7.

Étape 7 : si après l'étape 6 un noeud reste accroché à aucun arc, on enlève ce noeud. À ce moment-ci, on a un nouveau PRF. Aller à l'étape 4.

Exemple : nous reprendrons l'exemple de la page 9. Le PRF original est :

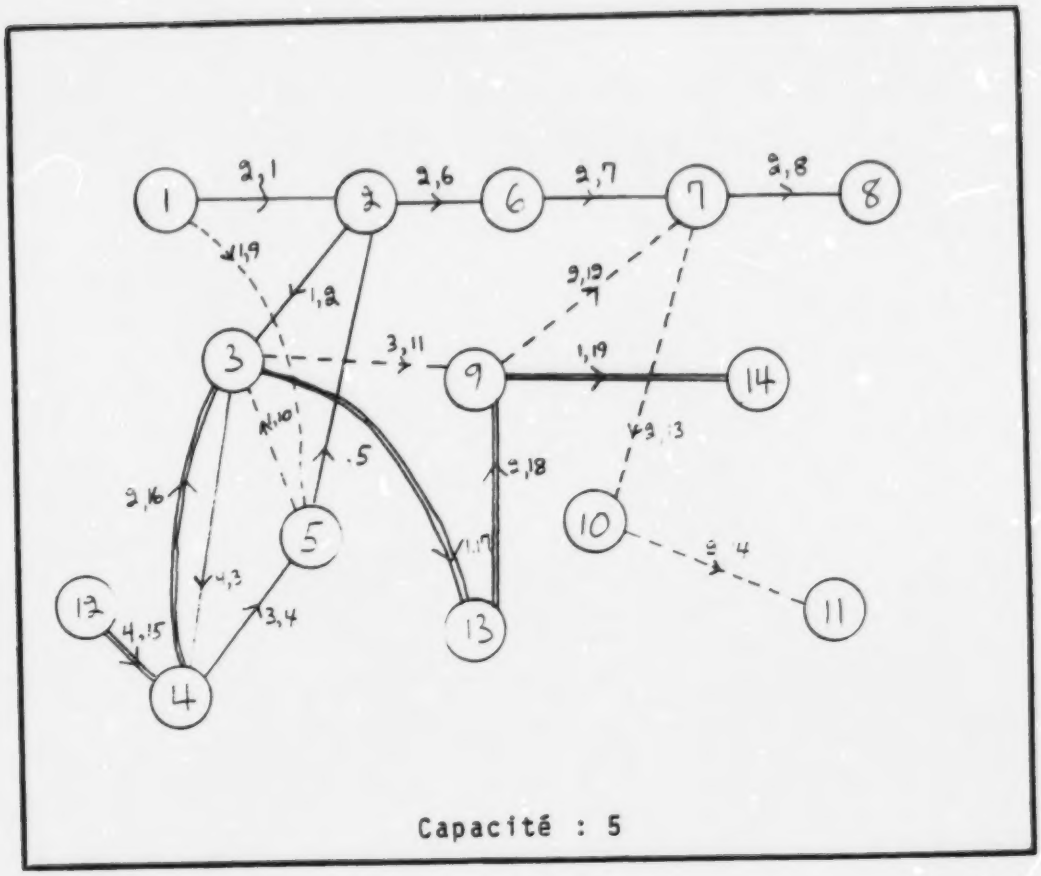

Figure 4 : PRF original

Initialisation : i = 0

Étape 1 : on met un relais aux noeuds 1 et 12.

Étape 2 : on enlève du PRF original les arcs 1, 2, 9, 10, 11 et 15.

Étape 3 : on enlève les noeuds 1 et 12.

Étape 4 : i = 1 et PRF_1 est :

PRF_1 :

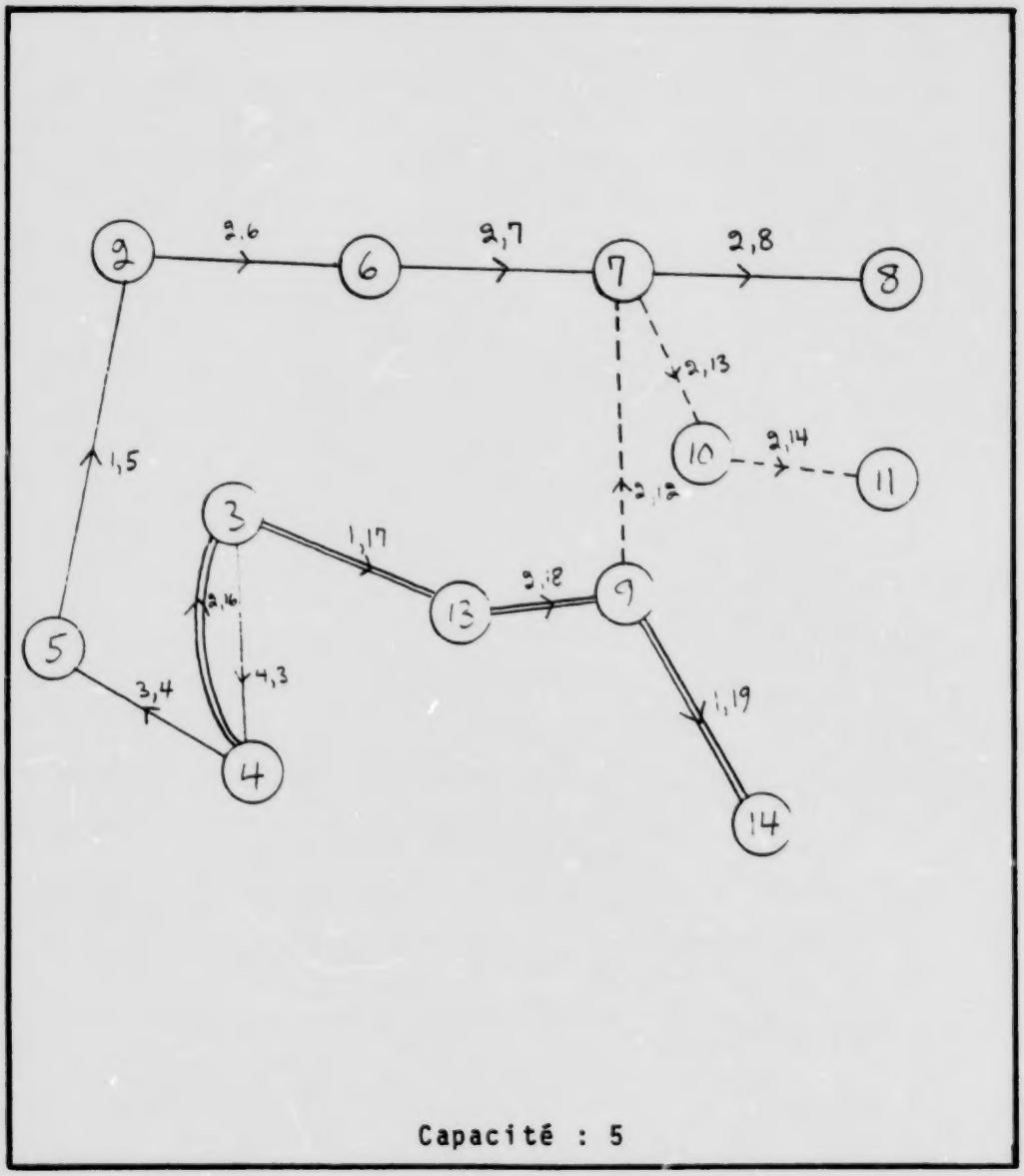

Figure 5 : PRF_1

Étape 5 : dans PRF_1 on a :

$\|C(2)\| = 2$	$\|C(8)\| = 0$
$\|C(3)\| = 4$	$\|C(9)\| = 3$
$\|C(4)\| = 2$	$\|C(10)\| = 1$
$\|C(5)\| = 3$	$\|C(11)\| = 0$
$\|C(6)\| = 2$	$\|C(13)\| = 2$
$\|C(7)\| = 3$	$\|C(14)\| = 0$

Donc le noeud dont la couverture a la plus grande cardinalité est le noeud 3 avec $|C(3)| = 4$. On met un relais au noeud 3.

Étape 6 : on enlève de PRF_1 les arcs de C(3), c'est-à-dire les arcs 3, 17, 18 et 19.

Étape 7 : on enlève de PRF_1 les noeuds 13 et 14.

Étape 4 : $i = 2$ et PRF_2 est :

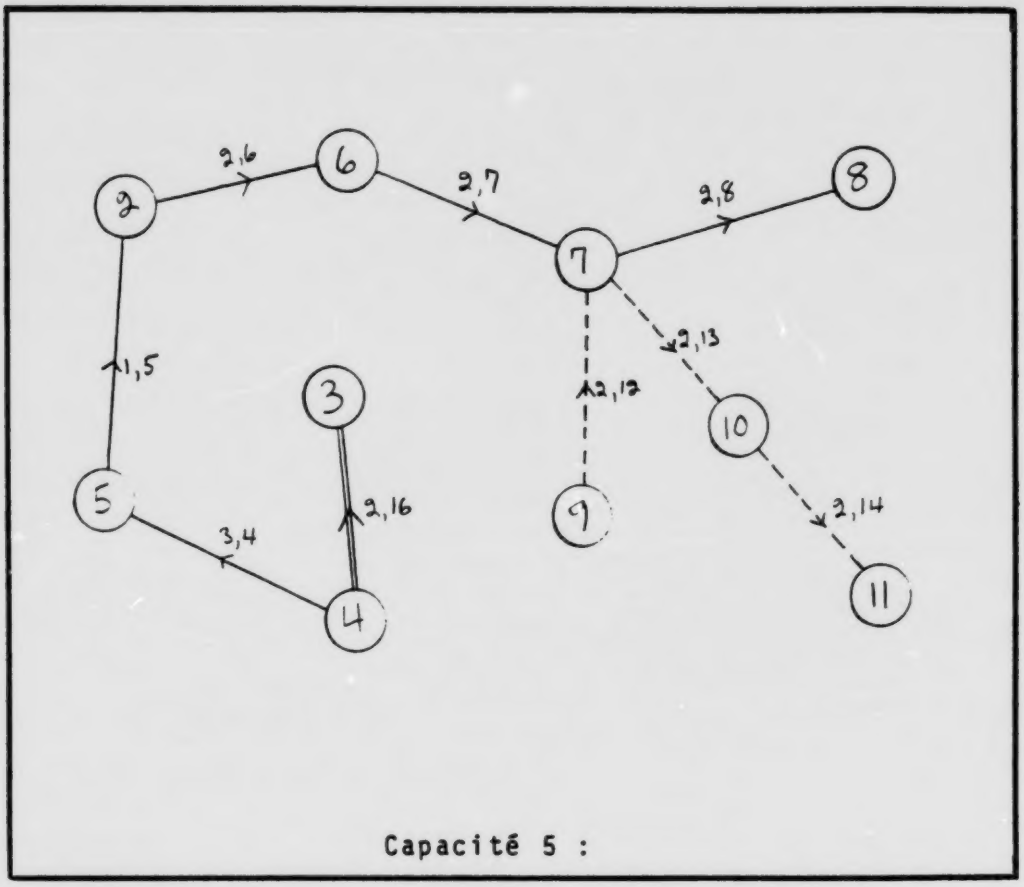

Figure 6 : PRF_2

Étape 5 : la plus grande cardinalité pour la couverture d'un noeud de PRF_2 est 3 avec $|C(5)| = |C(7)| = 3$. On choisit arbitrairement le noeud 5 pour y mettre un relais.

Étape 7 : on enlève de PRF_2 les noeuds 2 et 6.

Étape 4 : $i = 3$ et PRF_3 est :

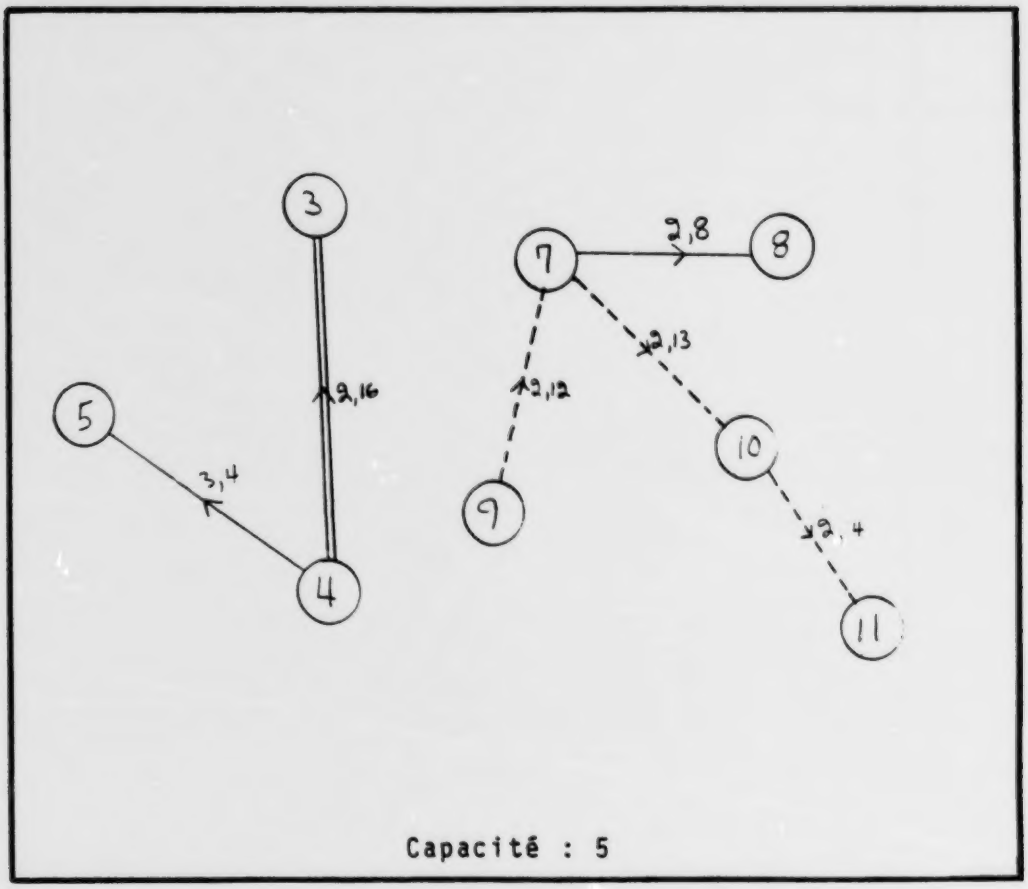

Figure 7 : PRF_3

Étape 5 : la plus grande cardinalité pour un noeud de PRF_3 est 3 avec $|C(7)| = 3$. On met un relais au noeud 7.

Étape 6 : on enlève de PRF_3 les arcs 8, 13 et 14.

Étape 7 : on enlève de PRF_3 les noeuds 8, 10 et 11.

Étape 4 : $i = 4$ et PRF_4 est :

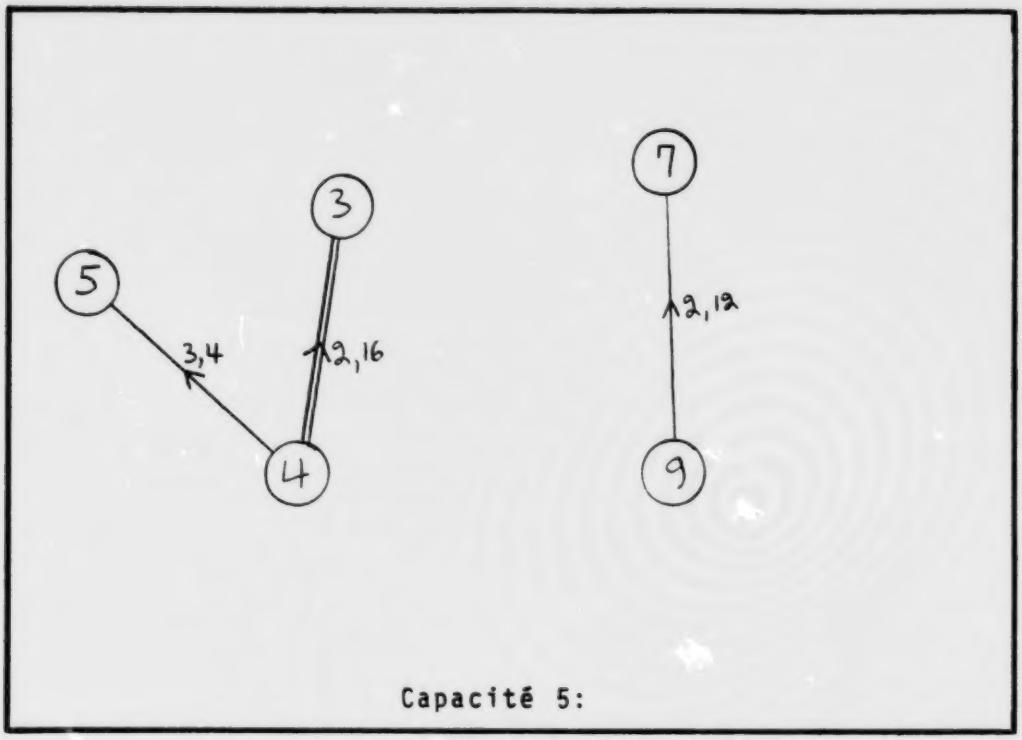

Figure 8 : PRF_4

Et on voit qu'en continuant cet heuristique, on va devoir mettre un relais au noeud 4, puis pour finir au noeud 9.

On aura donc mis des relais aux noeuds 1, 3, 4, 5, 7, 9 et 12, une solution dont le coût est 7, soit un de plus que la solution 3 de la page 11 .

2.3 Modélisation du PRF en un problème de recouvrement

Tout ce qui précède nous amène naturellement à voir le PRF comme un problème de recouvrement.

Faisons un bref rappel sur ce qu'est un problème de recouvrement : on nous donne une famille de sous-ensembles

provenant d'un ensemble, chaque sous-ensemble ayant un coût associé. Le problème de recouvrement est de choisir, au moindre coût des sous-ensembles de la famille de façon à ce que leur union redonne l'ensemble dont ils proviennent.

Dans le PRF, l'ensemble de départ sera formé de tous les arcs de ce PRF et la famille de sous-ensembles qui en provient se constituera des couvertures de chaque noeud qui auront toutes un coût de 1. On voudra donc choisir le plus petit nombre de couvertures pour couvrir tous les arcs du PRF. De plus, on sait que le fait de choisir une couverture revient à placer un relais au noeud dont elle est issue.

Les variables de ce problème seront donc binaires et seront identifiées comme suit :

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{s'il n'y a pas de relais au noeud i. (On ne prend pas la couverture du noeud i).} \\ 1 & \text{s'il y a un relais au noeud i. (On prend la couverture du noeud i).} \end{cases}$$

Si le PRF considéré comporte n noeuds et m arcs on aura :

* l'objectif est minimiser $\sum_{i=1}^{n} y_i$

* il y a une contrainte par arc, cette contrainte stipulant qu'on doit mettre un relais à au moins un noeud dont la couverture contient l'arc en question. Donc :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} \; Y_i > 1 \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$\text{avec } a_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si la couverture du noeud i contient l'arc j.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit que c'est bien un problème de recouvrement, un cas particulier de programmation linéaire en nombres entiers. De plus, les variables et la matrice des contraintes sont binaires et tous les coûts de l'objectif sont 1. Nous appellerons ce modèle le modèle 1.

Exemple : la formulation du problème contenu dans la figure 3 est :

$$\text{minimiser} \quad \sum_{i=1}^{14} y_i$$

sous les contraintes.

# arc	# noeud (y_i) 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			1
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			1
3	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			1
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			1
5	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_1		1
6	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_2		1
7	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	.		1
8	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	.	>	1
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.		1
10	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.		1
11	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.		1
12	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	.		1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	y_{14}		1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0			1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0			1
16	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0			1
17	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0			1
18	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0			1
19	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0			1

En examinant cet exemple, on voit tout de suite que les noeuds de fin de tournée ne sont pas nécessaires (car leurs couvertures sont nulles).

2.3.1 Complexité du PRF

Nous allons commencer par considérer un PRF particulier. Puis, nous verrons que tout problème de recouvrement n'est rien d'autre qu'un de ces cas particuliers de PRF. Alors, si nous avons un algorithme qui résout le PRF, on peut résoudre tous les problèmes de recouvrement qui sont NP-complets. Par conséquent, on aura prouvé que le PRF est NP-complet.

2.3.2 Cas particulier du PRF

Considérons un PRF où toutes les tournées sont cycliques et où la capacité est infinie (prendre la somme de la demande de tous les arcs est suffisant). Alors si on écrit ce PRF sous la forme d'un problème de recouvrement comme à la section précédente, on verra que toutes les lignes correspondant à un arc d'une même tournée seront identiques car comme la capacité est infinie et la tournée est cyclique, le fait de mettre un relais sur un noeud de la tournée nous assure que tous les arcs de la tournée sont couverts.

Nous obtenons ainsi un problème de recouvrement avec autant de lignes identiques qu'il y a d'arcs dans chaque tournées. En ne gardant qu'une ligne par tournée, on obtient un problème de recouvrement équivalent.

Exemple d'un PRF de capacité infinie avec des tournées cycliques.

Soit le PRF suivant :

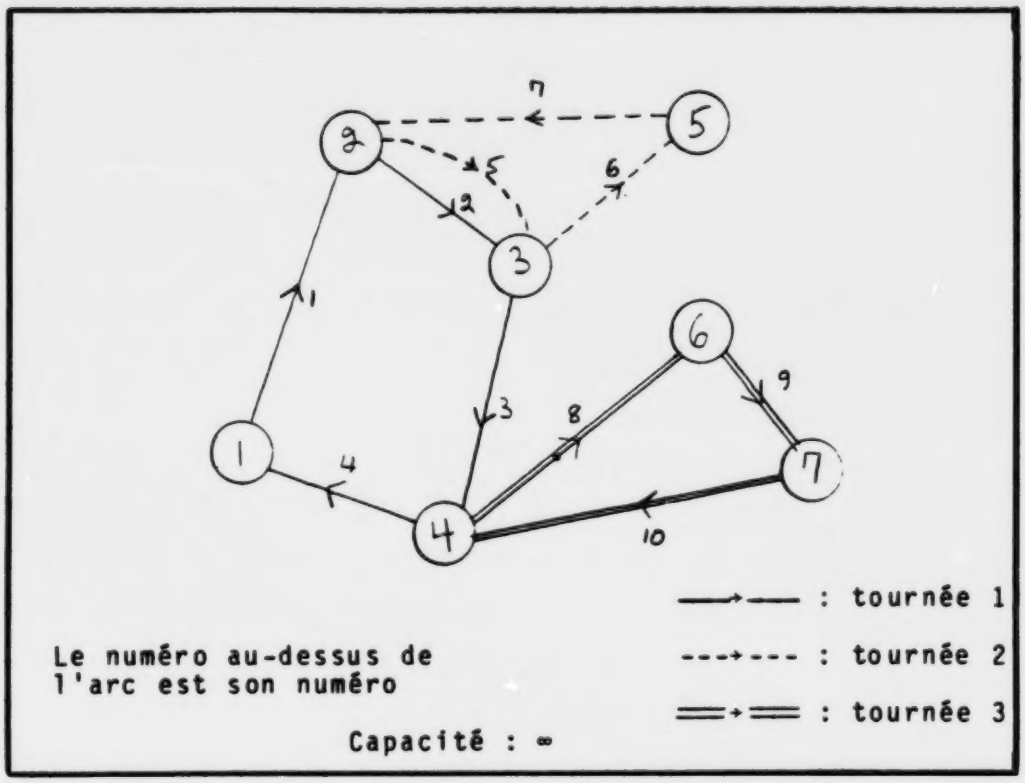

Figure 9 : Exemple d'un PRF de capacité infinie avec des tournées cycliques

Sous forme d'un problème de recouvrement, ce PRF particulier s'écrit :

$$\text{Minimiser} \sum_{i=1}^{7} y_i$$

sous les contraintes

$$
\begin{array}{c}
\\
\underline{\#\ \text{arc}}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\\
\text{tournée 1} \\
\\
\\
\text{tournée 2} \\
\\
\\
\text{tournée 3} \\
\\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
\underline{\#\ \text{noeud}\ (y_i)} \\
1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7 \\
\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{c} 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}\right.
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_7 \end{bmatrix}
\geq
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

En ne gardant qu'une ligne pour chaque tournée, on obtient le problème équivalent :

$$\text{Minimiser} \sum_{i=1}^{7} y_i$$

sous les contraintes

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_7 \end{bmatrix}
\geq
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

2.3.3 Problème de recouvrement : cas particulier du PRF

En faisant le chemin inverse de l'exemple de la section précédente, il est évident que l'on peut prendre n'importe quel problème de recouvrement, reproduire

autant de fois chacune de ses lignes qu'elle contient d'éléments non nuls et on a la modélisation en un problème de recouvrement d'un PRF de capacité infinie et dont toutes les tournées sont cycliques.

Par le fait même, on vient de montrer que tout problème de recouvrement est un cas particulier de PRF. Par conséquent, si on a un algorithme qui résout le PRF, alors on peut résoudre tous les problèmes de recouvrement. Comme le problème de recouvrement est NP-complet et que le PRF se modélise en un problème de recouvrement, alors le PRF est NP-complet.

2.4 Bornes

Soit C le coût d'une solution d'un PRF relaxé de ses contraintes d'intégrité. Alors [C] + 1 nous fournit une borne inférieure du coût de la solution optimale de ce PRF.

La résolution de ce même PRF par l'heuristique de la section 2.2 nous fournit une borne supérieure pour le coût de la solution optimale de ce PRF.

2.5 Techniques de réduction du problème de recouvrement

À partir de maintenant, nous désignons le problème de recouvrement par PR et le problème de recouvrement dont les contraintes de binarité sur les variables ont été remplacées par des contraintes de non-négativité, par PRR (pour problème de recouvrement relaxé).

2.5.1 Cas où une contrainte ne contient qu'un seul coefficient non-nul

On a vu que dans un problème de recouvrement, chaque contrainte est de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, y_i > 1$$

avec $y_i = 0$ ou 1 et les a_{ji} sont fixés à l'avance avec valeurs 0 ou 1. Si un seul des a_{ji} de la contrainte ci-dessus est non nul, disons $a_{j\ell} = 1$ et $a_{jk} = 0$ si $k \neq \ell$, alors cette contrainte s'écrit :

$$y_\ell > 1$$

ce qui entraîne que $y_\ell = 1$ et aussi qu'on peut alors laisser tomber toutes les contraintes de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, y_i > 1$$

avec $a_{k\ell} = 1$ car elles sont automatiquement satisfaites.

Exemple :

Disons qu'on ait les contraintes suivantes :

$$y_2 > 1 \qquad (1)$$

$$y_1 + y_2 + y_4 > 1 \qquad (2)$$

$$y_3 + y_5 > 1 \qquad (3)$$

$$y_2 + y_5 > 1 \qquad (4)$$

$$y_i = 0 \text{ ou } 1,\ i = 1,\ldots,5$$

alors la contrainte (1) fait que $y_2 = 1$ et on peut éliminer les contraintes (2) et (4) qui sont automatiquement satisfaites.

2.5.2 Dominance de ligne

Supposons qu'on ait les deux contraintes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\, y_i \geq 1 \qquad (1)$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} a_{2i}\, y_i \geq 1 \qquad (2)$$

et que pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ $a_{1i} \leq a_{2i}$ alors la contrainte (2) devient inutile car lorsque la contrainte (1) est satisfaite, la contrainte (2) le sera automatiquement. On dit que la contrainte (2) est dominée par la contrainte (1).

Exemple :

soit $y_1 + y_3 \geq 1$ (1)

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 1$ (2)

alors (2) est dominée par (1) et on peut éliminer (2).

2.5.3 Autres résultats généraux

i) Si un PRR a une solution optimale binaire, alors c'est la solution optimale du PR correspondant.

ii) Soit y_i ($i = 1,\ldots,n$) une solution non-binaire d'un PRR. Alors

$$y_i' = \begin{cases} 0 & \text{si } y_i = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une solution réalisable du PR correspondant.

iii) La solution optimale d'un PRR reste la même si on ajoute les contraintes supplémentaires $y_i \leq 1$ $i = 1,\ldots,n$.

2.5.4 Technique de réduction par le point extrême

Soit un PR qui s'écrit

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, y_i$$

sous les contraintes

$$E\, y \geq e$$

où $E = (e_{ij})$ est une matrice binaire, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est une solution et e est un vecteur-colonne de 1.

Il a été démontré (Salkin, 1975) que si y est une solution réalisable de ce PR mais n'est pas un point extrême du PRR correspondant, il est toujours possible de trouver une autre solution au PR qui sera un point extrême du PRR correspondant et qui aura un coût moindre.

Plus en détails, on pourrait démontrer (Salkin, 1975) que si y est une solution de ce PR mais n'est pas un point extrême du PRR correspondant, alors il existe au moins une contrainte, disons la j-ième, telle que

$$e_{j1}y_1 + e_{j2}y_2 + \ldots + e_{jn}y_n > 1 \quad \text{(inégalité stricte)}$$

et il existe au moins une colonne, disons la ℓ-ième, telle que $y_\ell = 1$ et $e_{i\ell} = 0$ si la i-ième contrainte est satisfaite à égalité. On peut poser $y_\ell = 0$ et les contraintes seront encore satisfaites. On obtient de cette façon une nouvelle solution moins coûteuse.

En pratique, on ne vérifie pas si une solution du PR est un point extrême du PRR correspondant mais on utilise plutôt la démarche suivante :

Soit $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ la solution proposée du PR. S'il existe une colonne ℓ avec $y_\ell = 1$ et telle que $e_{i\ell} = 0$ pour chaque contrainte i satisfaite à égalité, alors on peut poser $y_\ell = 0$; les contraintes seront encore satisfaites et à moindre coût. On obtient de cette manière une nouvelle solution y' avec

$$y'_\ell = 0 \quad \text{et} \quad y'_j = y_j \ (j \neq \ell) \ .$$

Et l'on répète ce procédé tant que c'est possible de réduire le coût de l'objectif.

Exemple :

$$\text{Minimiser} \sum_{i=1}^{7} y_i$$

$$\text{sous} \quad Ey \geq e$$

$$\text{où} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soit Y = (1,1,1,0,1,1,0)

Alors $EY = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et les contraintes 1, 2, 3 et 5 sont satisfaites avec une stricte inégalité. Voyons s'il est possible de réduire cette solution à une autre moins coûteuse.

La seule contrainte satisfaite avec une égalité est la contrainte 4. Alors cherchons les colonnes ℓ telles que $y_\ell = 1$ et $e_\ell 4 = 0$. Ces colonnes sont 1, 2, 5 et 6. Alors on peut fixer arbitrairement une des quatre variables y_1, y_2, y_5, y_6 à 0 et on obtient une solution de 1 moins coûteuse. Fixons y_1 à 0. On obtient une nouvelle solution y' = (0,1,1,0,1,1,0) telle que

$$Ey' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Seule la contrainte 4 est satisfaite à une égalité. On peut donc encore tenter de réduire y' à une solution moins coûteuse.

Cherchons les colonnes ℓ telles que $y'_\ell = 1$ et $e_{4\ell} = 0$. Ces colonnes sont 2, 5 et 6. Alors on peut fixer arbitrairement une des trois variables y_2, y_5, y_6 à 0 et on obtient une nouvelle solution y" = (0,0,1,0,1,1,0) telle que

$$Ey'' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Seules les contraintes 2 et 4 sont satisfaites à égalité. On peut tenter de réduire y". Cherchons les colonnes ℓ telles que $y''_\ell = 1$ et $e_{2\ell} = e_{4\ell} = 0$. Il n'y a que la colonne avec $\ell = 5$. On fixe $y_5 = 0$ et y''' = (0,0,1,0,0,1,0) et

$$Ey''' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La contrainte 1 n'est pas satisfaite à égalité et on peut encore tenter de résuire y'''.

Mais ici il n'y a pas de colonne ℓ avec $y_\ell = 1$ et $e_{2\ell} = e_{3\ell} = e_{4\ell} = e_{5\ell} = 0$. On ne peut pas aller plus loin par cette technique.

On aura passé de la solution y = (1,1,1,0,1,1,0) de coût 5 à la solution y''' = (0,0,1,0,0,1) de coût 2.

2.5.5 Technique de réduction de la solution arrondie

Rappel : Soit un PRR, sa solution optimale y et son PR correspondant. On dit que $\bar{y}$ est la solution arrondie de y si

$$\bar{y}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_i = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

De plus, $\bar{y}$ est une solution du PR correspondant. Si un PRR a une solution non-binaire, alors on peut toujours trouver une meilleure solution au PR correspondant que la solution optimale arrondie du PRR correspondant (Salkin, 1975). Voici une idée de la démonstration de ce résultat.

Soit le PRR suivant

$$\text{Minimiser} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$Ey \geq e$$

$$y \geq 0$$

et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ une solution optimale non binaire.

Considérons les colonnes ℓ de E pour lesquelles $0 < Y_\ell < 1$ et les contraintes de $Ey \geq e$ qui sont satisfaites explicitement par les seules variables y_ℓ, c'est-à-dire les contraintes qui sont satisfaites uniquement par les variables y_ℓ. On forme la matrice E* qui est la matrice E à laquelle on n'a laissé que les colonnes ℓ et les lignes qui sont satisfaites explicitement par les y_ℓ.

E* comportera toujours au moins deux 1 par ligne.

Soit $y_{\ell_1}, \ldots, y_{\ell_p}$ les variables associées aux colonnes de E*. Disons qu'à la ligne k, on a $e^*_{k\ell_r} = e^*_{k\ell_s} = 1$. Alors on peut prendre comme nouvelle solution $y_{\ell_r} = 1$ et $y_{\ell_s} = 0$ au lieu de la solution arrondie qui comporte $y_{\ell_r} = y_{\ell_s} = 1$.

En pratique, lorsqu'on aura choisi une colonne r pour mettre sa variable y_{ℓ_r} correspondante à 1, on enlèvera cette colonne de la matrice E* sans fixer les autres y_ℓ à 0, puis on enlèvera aussi les lignes qui ont un 1 dans la colonne ℓ_r, car ces lignes correspondent maintenant à des contraintes automatiquement satisfaites car on fixe Y_{ℓ_r} à 1. On obtient ainsi une matrice réduite E**. On fixe ainsi une variable à 1 jusqu'à ce que toutes les contraintes aient été éliminées. Les valeurs des variables correspondantes aux colonnes qui restent sont mises à 0.

Lorsque nous avons le choix entre plusieurs colonnes, nous prenons celle qui a le plus de 1. Si plusieurs colonnes ont le même nombre maximum de 1, on en choisit une arbitrairement.

Exemple :

Soit le PRR suivant :

$$\text{Minimiser} \sum_{i=1}^{7} y_i$$

sous les contraintes.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, 7$$

dont la solution optimale est (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 0, 0). La solution arrondie est (1,1,1,1,1,0,0) avec un coût de 5.

Formons E*. Pour cela, il faut enlever toutes les colonnes dont la valeur de la variable correspondante est 0 ou 1. Donc, on enlève de E les colonnes 6 et 7. De ce qui reste, il ne faut garder que les contraintes qui sont satisfaites explicitement par les variables $y_1, \ldots, y_5$. Toutes les contraintes le sont. Donc

$$E^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

On pose $y_3 = 1$, on enlève la colonne 3 et les lignes correspondantes aux contraintes automatiquement satisfaites lorsque $y_3 = 1$, c'est-à-dire les lignes 1, 3 et 4.

$$E^{**} = \begin{array}{c} \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_4 & y_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

On recommence le même procédé. On fixe y_1 à 1. On enlève de E** la colonne 1 et les lignes correspondantes aux contraintes automatiquement satisfaites par $y_1 = 1$, c'est-à-dire les lignes 2 et 6.

$$\text{Alors} \quad E^{***} = \begin{array}{c} \begin{matrix} y_2 & y_4 & y_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 5 \end{matrix}$$

On pose $y_4 = 1$ ce qui satisfait la dernière contrainte qui restait et on fixe y_2 et y_5 à 0.

La solution optimale du PRR est (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 0, 0). Les variables y_ℓ telles que $0 < y_\ell < 1$ sont y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5. La solution arrondie est (1,1,1,1,1,0,0). Mais on a montré qu'il n'est pas nécessaire d'avoir $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 1$: il suffit d'avoir $y_1 = y_3 = y_4 = 1$ et $y_2 = y_5 = 0$.

On a une nouvelle solution de ce PRR qui est (1,0,1,1,0,0,0) de coût 3. C'est aussi une solution du PR correspondant et qui coûte 2 de moins que la solution arrondie. En fait, c'est la solution optimale du PR correspondant.

2.6 Méthode heuristique pour résoudre le PR

À l'aide des techniques de réduction que nous venons de voir, nous avons mis au point une méthode heuristique plutôt efficace pour résoudre le PR. Le voici :

Étape 1 : Soit un PR à résoudre. Résoudre le PRR correspondant à l'aide de la méthode du simplexe. Soit y la solution optimale du PRR ainsi obtenue. Si y est une solution binaire, c'est aussi la solution optimale du PR correspondant et l'heuristique se termine là. Sinon, aller à l'étape 2.

Étape 2 : Arrondir la solution y. Soit $\bar{y}$ cette solution arrondie. Réduire $\bar{y}$ à une solution $\bar{y}'$ moins coûteuse à l'aide de la technique de réduction de la solution arrondie. Aller à l'étape 3.

Étape 3 : Si on peut appliquer la technique de réduction par le point extrême à la solution $\bar{y}'$, alors aller à l'étape 4. Sinon on prend $\bar{y}'$ comme solution du PR. $\bar{y}'$ n'est pas forcément la solution optimale du PR mais c'est quand même une très bonne solution réalisable. La méthode heuristique se termine ici.

Étape 4 : Appliquer la technique de réduction par le point extrême à $\bar{y}'$ pour obtenir une nouvelle solution $\bar{y}''$. $\bar{y}''$ n'est pas forcément la solution optimale du PR mais c'est quand même une très bonne solution réalisable. La méthode heuristique se termine ici.

CHAPITRE 3

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Maintenant que nous avons décrit le problème de ravitaillement des facteurs (PRF) et que nous connaissons une méthode heuristique pour le résoudre, nous allons appliquer nos connaissances sur des données réelles fournies par Postes Canada.

3.1 Données du problème

Les données sont celles de la moitié du territoire que couvre la succursale postale Henri-Bourassa à Montréal. Cette succursale dessert toutes les adresses civiques dont les trois premiers caractères du code postal, qui en comporte six, sont H2B ou H2C. Nous avions les données qui concernent les adresses dont le code commence par H2B.

Pour résoudre d'autres problèmes de recherche opérationnelle, Postes Canada avait déjà fait représenter, par l'entremise du Centre de recherche sur les transports (C.R.T.), cette portion de territoire sous forme de réseau. À chaque code postal correspond un arc différent et les noeuds sont évidemment les points de jonction entre deux arcs ou plus. Par exemple, un coin de rue normal est un noeud ayant huit arcs incidents car le code postal diffère d'un côté de rue à l'autre.

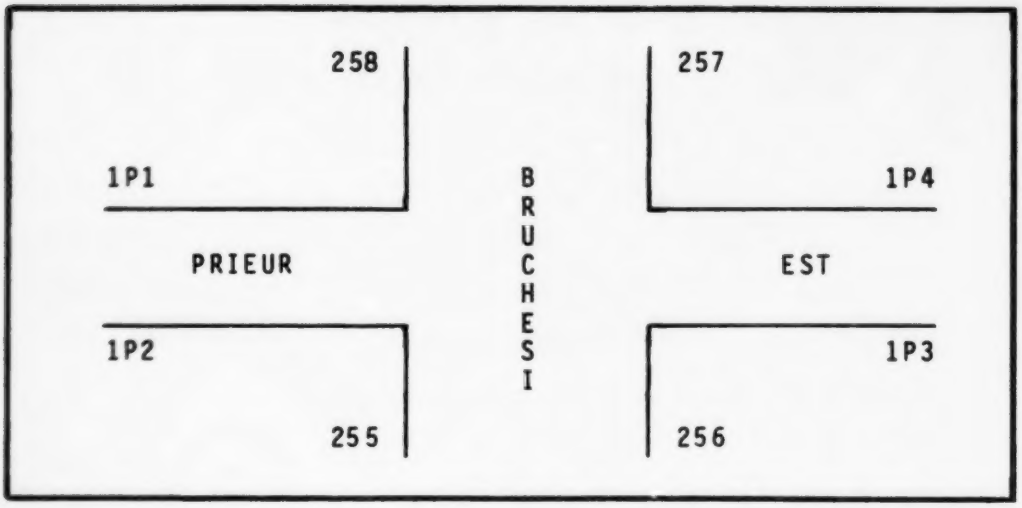

Figure 10 : Exemple d'un coin de rue normal

Cette portion de territoire, que nous appellerons désormais, territoire H2B, comprend, une fois représenté sous forme de réseau, 384 arcs et 138 noeuds ce qui veut dire que le problème de recouvrement qui en découle a 384 contraintes et 138 variables. Le nombre de tournées (nombre de facteurs) pour desservir le territoire H2B est de 11. Finalement, le volume de courrier pour chaque code postal (chaque arc) a été fixé au volume maximal journalier pour une semaine typique haussé de 10 %. Les données de volume de courrier ont également été fournies par Postes Canada.

3.2 Conversions préliminaires du fichier du réseau du territoire H2B

Le fichier du réseau du territoire H2B fourni par Postes Canada ne comprenait que des arcs non orientés. Comme pour décrire le PRF on se sert de tournées qui sont une suite d'arcs orientés, il a fallu reconvertir le

fichier en orientant les arcs dans les bonnes directions. Il était aussi nécessaire de dédoubler les arcs servant à plus d'un facteur (car un facteur peut emprunter un arc sans y livrer de courrier) et ceux qui servent plus d'une fois au même facteur (comme lorsqu'un facteur revient sur ses pas). Nous avons dû aussi mettre un indice de volume pour chaque arc du nouveau fichier et mentionnons finalement que d'autres données non pertinentes à notre problème, comme le temps de parcours de chaque arc, ont été éliminées.

Pour faire tout cela, il était essentiel d'écrire un programme d'ordinateur car cela aurait été trop long à faire manuellement. Le programme était en Fortran et il convertissait aussi toutes ces données en un PRF modélisé en un problème de recouvrement sous forme matricielle.

3.3 Résolution du problème

Comme nous l'avons déjà mentionné, le problème fut résolu à l'aide de l'heuristique de la section 2.7. Pour obtenir une solution au PRR correspondant, nous avons utilisé le logiciel SAS/OR. Pour la suite, nous avons écrit un programme en Fortran pour appliquer, à la solution arrondie du PRR, les techniques des sections 2.5.4 et 2.5.5. L'ordinateur utilisé était un IBM 7171.

Pour le territoire H2B, nous avons trouvé une solution qui comporte 13 relais alors que la solution du même problème relaxé de ses contraintes d'intégrité donne 12. Donc, en supposant le pire, il n'y aurait qu'un relais de trop.

De plus, Postes Canada utilisait 33 relais pour desservir le territoire H2B, ce qui démontre l'urgence d'optimiser les points de relais.

L'heuristique, dans ce cas-ci, a fait grandement ses preuves.

3.4 Analyse de sensibilité

Toujours avec le problème du territoire H2B, nous avons fait varier les demandes sur les arcs en les multipliant par un coefficient allant de 0,1 jusqu'à 2,0. Pour chaque facteur, le tableau 1 donne le coût de la solution de PRF relaxé de ses contraintes d'intégrité et le coût de la solution du PRF fournie par l'heuristique (appelée coût du PRF). De plus, on fournit le nombre d'itérations de simplexe en phase 1 et le nombre d'itérations de simplexe en phase 2 pour résoudre le PRF relaxé.

Tableau 1 : Résultats de l'analyse de sensibilité

COEFFICIENT	COÛT PRF RELAXÉ	COÛT PRF	ITÉRATIONS PHASE 1 PRF RELAXÉ	ITÉRATIONS PHASE 2 PRF RELAXÉ	ERREUR MAXIMUM	TEMPS D'EXÉCUTION (secondes)
0,1	9,000	9	335	2	0	10,16
0,2	9,000	9	335	2	0	10,17
0,3	9,000	9	335	2	0	10,16
0,4	9,000	9	335	2	0	10,16
0,5	9,000	9	335	2	0	10,15
0,6	10,000	10	377	1	0	10,50
0,7	10,000	10	365	6	0	10,67
0,8	10,000	10	426	18	0	11,48
0,9	10,000	10	430	34	0	11,81
1,0	12,000	13	429	31	1	11,97
1,1	12,500	13	481	28	0	12,81
1,2	14,000	15	478	23	1	13,08
1,3	16,000	17	468	44	1	13,38
1,4	16,750	17	486	36	0	13,52
1,5	17,330	18	501	21	0	13,44
1,6	19,000	19	542	40	0	13,76
1,7	21,500	22	607	39	0	15,00
1,8	22,100	23	524	32	0	14,04
1,9	22,100	23	562	32	0	15,39
2,0	22,600	23	532	31	0	14,26

3.5 Générations de problèmes aléatoires

Pour s'assurer que l'heuristique que nous avons développée est valable en général pour résoudre un PRF, nous avons engendré aléatoirement vingt autres PRF de même taille (138 noeuds et 384 arcs). Le tableau 2 qui suit résume les résultats obtenus.

Tableau 2 : Résultats de l'application de l'algorithme sur des PRF aléatoires

NUMÉRO DU PROBLÈME	COÛT PRF RELAXÉ	COÛT PRF	ITÉRATIONS PHASE 1 PRF RELAXÉ	ITÉRATIONS PHASE 2 PRF RELAXÉ	ERREUR MAXIMUM	TEMPS D'EXÉCUTION (secondes)
1	8,342	9	693	211	0	25,90
2	8,950	10	551	173	1	19,34
3	7,375	10	675	184	2	25,83
4	9,333	11	627	165	1	24,60
5	8,000	8	670	213	0	26,39
6	8,500	9	722	166	0	25,67
7	10,000	11	674	141	1	21,97
8	9,333	10	690	144	0	23,35
9	9,222	10	692	136	1	23,65
10	9,467	11	574	88	1	18,80
11	10,250	12	670	144	1	22,45
12	10,000	10	546	134	0	18,00
13	8,000	9	612	212	1	22,39
14	9,031	11	709	232	1	25,89
15	8,714	11	697	156	2	23,89
16	8,000	9	641	258	1	24,99
17	9,091	10	570	137	0	20,11
18	7,278	9	645	200	1	23,99
19	8,000	8	679	198	0	24,05
20	8,291	9	531	161	0	21,76

Il faut toutefois noter que pour un PRF irréaliste (points de relais desservant beaucoup de facteurs à la fois, tournées de facteur très longues avec une faible demande sur les arcs), le saut d'intégrité semble augmenter.

CHAPITRE 4

AUTRE MODÉLISATION DU PRF

Nous allons maintenant modéliser le PRF d'une façon différente. Cette nouvelle façon de voir les choses nous permettra d'obtenir les bases théoriques concernant la façon d'aborder un PRF de très grande taille.

Avant de poursuivre notre exposé, nous adoptons une convention d'ordre technique qui nous évite des difficultés. Cette convention est en vigueur jusqu'à la fin de ce mémoire et elle concerne la procédure à adopter si une tournée contient un ou plusieurs cycles.

Nous conviendrons que si une tournée contient un cycle, nous dédoublerons le noeud où le cycle commence afin d'obtenir une tournée linéaire.

Par exemple, la tournée ci-dessous

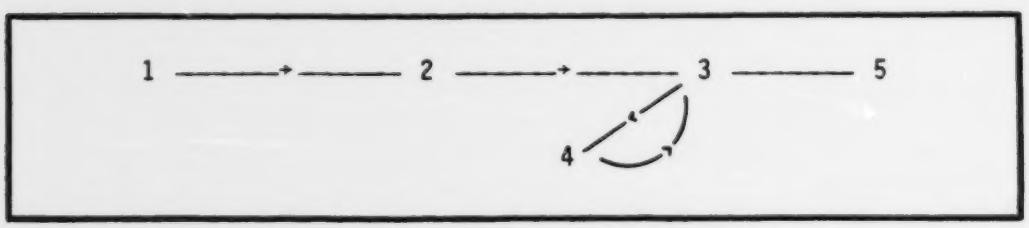

Figure 11 : Tournée contenant un cycle

devient

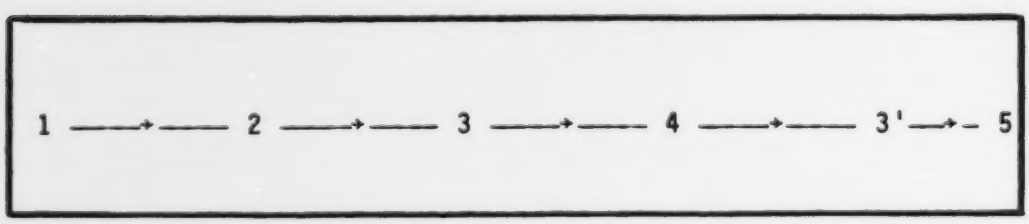

Figure 12 : Tournée linéaire après avoir dédoublé un noeud

Cette petite mise au point étant faite, nous pouvons poursuivre notre exposé.

Définition : soit la tournée r ainsi que l'ensemble N^r de tous les noeuds qui la composent et l'ensemble A^r de tous les arcs qui la composent. Soit $S \subseteq N^r$. Alors S est un placement de la tournée r si et seulement si

$$\bigcup_{x \in S} C(x) = A^r ,$$

autrement dit si l'union de toutes les couvertures des noeuds de S couvre tous les arcs de la tournée r.

D'une façon générale, nous dirons que s est un placement sans préciser la tournée si s est un placement pour une tournée quelconque.

Description du nouveau modèle

Nous adopterons les notations suivantes :

N = {noeuds du PRF}

R = {toutes les tournées du PRF}

N^r = {noeuds de la tournée r}

p^r = {placements de la tournée r}

P = {tous les placements possibles (sur toutes les tournées)}

$$a_{pi} = \begin{cases} 1 & \text{si le noeud i est utilisé par le placement, } p \in P,\ i \in N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(Note : les a_{pi} sont des constantes connues)

Les variables sont :

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si le noeud } i \text{ est utilisé, } i \in N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$z_k^r = \begin{cases} 1 & \text{si le placement } k \text{ est utilisé pour couvrir la tournée } r, \text{ pour tout } k \in p^r \text{ et pour tout } r \in R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le modèle, que l'on appellera modèle 2, est alors

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{i \in N} y_i$$

$$\text{sous (1)} \quad \sum_{k \in p^r} z_k^r = 1 \qquad \text{pour tout } r \in R$$

$$\text{(2)} \quad \sum_{k \in p^r} a_{ki}\, z_k^r \leq y_i \qquad \text{pour tout } r \in R$$

$$\text{(3)} \quad z_k^r = 0 \text{ ou } 1 \qquad \text{pour tout } k \in p^r, \text{ pour tout } r \in R$$

Les contraintes (1) nous assurent qu'on ne choisira qu'un placement réalisable par tournée. En effet, pour une tournée r fixée, une seule des variables z_k^r peut prendre la valeur 1. Disons que c'est la variable $z_{k_0}^r$. Alors pour un i fixé, on aura, d'après (2),

$$\sum_{k \in p^r} a_{ki}\, z_k^r = a_{k_0 i} z_{k_0}^r = a_{k_0 i} = \begin{cases} 1 & \text{si le noeud } i \text{ est utilisé par le placement } k_0. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui veut dire que si on choisit un placement qui utilise le noeud i, alors y_i prend la valeur 1. Par contre, si aucun des placements choisis n'utilise le noeud i, alors Y_i reste à 0.

On vient de montrer par le fait même qu'il n'est pas nécessaire d'imposer $Y_i = 0$ ou 1. Aucune contrainte d'intégrité ou de non-négativité n'est nécessaire sur les y_i.

Pour un PRF de grande taille, on ne peut évidemment pas énumérer tous les placements possibles. C'est une tâche à peu près impossible à faire mais si on emploie la technique de génération de colonnes, il n'est pas nécessaire de le faire.

4.1 Rappel sur la génération de colonnes

Pour avoir une description détaillée de la génération de colonnes, le lecteur pourra se référer à Bradley (1977), chapitre 12. Soit le programme linéaire PL suivant:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i$$

sous les contraintes

$$A\,X = b$$

$$X \geq 0$$

où $\quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

A est une matrice m par n et b, un vecteur colonne de m composantes.

Supposons aussi que n (le nombre de variables) soit tellement grand qu'il soit à peu près impossbile d'énumérer toutes les colonnes de A correspondant aux x_i. Alors il est approprié d'employer une technique de génération de colonnes.

L'essentiel de la méthode se résume à ce qui suit : plutôt que de considérer toutes les variables x_i où $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, on ne prend qu'un nombre restreint n' de variables x_{i_k} où $k\in\{1,2,\ldots,n'\}$ ($n' << n$) tout en s'assurant qu'avec celles-ci on puisse trouver au moins une solution réalisable et on forme le programme linéaire PL' suivant :

$$\text{Min} \quad \sum_{k=1}^{n'} c_{i_k} x_{i_k}$$

$$\text{sous} \quad A' X' = 0$$

$$X' \geq 0$$

$$\text{où} \quad X' = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n'}})$$

A' est la matrice obtenue de A en conservant seulement les co ɔnnes qui correspondent aux variables $(x_{i_k})_{k=1,\ldots,n'}$.

On résout le PL' et on obtient sa solution X' optimale, qui est une solution réalisable, possiblement optimale de PL. (Dans cette solution, on a automatiquement $x_\ell = 0$ si $\ell \notin \{i_1, \ldots, i_{n'}\}$). Maintenant on veut savoir si on pourrait obtenir une solution moins coûteuse en mettant plus de variables dans PL'.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ la valeur à l'optimalité des variables duales de PL' et $X' = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_{n'}})$, la solution optimale de PL'.

Soit aussi la matrice $A' = (a_{ji_k})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n'}}$.

La valeur $(\Pi_{i_k})_{k=1,\ldots,n'}$ des coûts réduits est donnée par $\Pi_{i_k} = c_{i_k} - \sum_{j=1}^{m} a_{ji_k} \lambda_j$. À l'optimalité, on a $0 \leq \Pi_{i_k} = c_{i_k} - \sum_{j=1}^{m} a_{ji_k} \lambda_j$ pour tout $k \in \{1,\ldots,n'\}$. Si l'on considère une nouvelle variable $x_\ell \notin \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n'}}\}$ dont la colonne associée dans la matrice A est $\begin{bmatrix} a_{i_\ell} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m_\ell} \end{bmatrix}$ et si $0 < \Pi_\ell = c_\ell - \sum_{j=1}^{m} a_{j\ell} \lambda_j$, alors la solution X' reste optimale et il est inutile de considérer X_ℓ. S'il en est de même pour toutes les autres variables qui n'étaient pas dans le PL', alors X' est aussi la solution optimale de PL et il n'était pas utile de considérer ces autres variables.

Si par contre $0 > \Pi_\ell = c_\ell - \sum_{j=1}^{m} a_{j\ell} \lambda_j$, alors la solution X' n'est pas optimale pour PL et il est essentiel d'inclure X_ℓ dans les variables à considérer. On a maintenant un nouveau programme linéaire PL" et on recommence le procédé.

Pour savoir s'il faut ajouter une autre variable au PL', il suffit de résoudre le sous-problème :

Soit $\{x_{\ell_1}, \ldots, x_{\ell_p}\} = \{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$

Le sous-problème est :

$$\max c_j - \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda_j$$

sous la contrainte que $\begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix}$ est une colonne possible de A

et c_j est le coût associé à cette colonne. Ici, les variables sont c_j et $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Supposons que le sous-problème atteint l'optimalité pour une colonne dont la variable correspondante est x_{ℓ_q}. Alors si $\Pi_{\ell_q} = c_{\ell_q} - \sum_{j=1}^{m} a_{j\ell_q} \lambda_j > 0$, on sait que X' est la solution optimale de PL (avec $x_{\ell_1} = \ldots = x_{\ell_p} = 0$). Sinon, il faut inclure x_{ℓ_q} dans les variables à considérer et on recommence le procédé.

Il est évident que pour employer un algorithme de génération de colonnes, il faut que le sous-problème ait une forme facilement résoluble. Par exemple, ce pourrait être un problème de "sac à dos" ou de plus court chemin.

Exemple :

Il n'est évidemment pas nécessaire de résoudre le problème qui va suivre à l'aide d'une génération de colonnes vue sa petite taille. De plus, on ne fait pas une vraie génération de colonnes car on ne considère pas le sous-problème mais cet exemple illustre bien quand même les propos qui précèdent.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{sous} \quad & x_2 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + 3x_5 = 0 . \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Le tableau du simplexe de ce programme linéaire est:

1	-2	0	0	0	0
0	1	0	1	2	1
1	-1	1	0	3	0

En ne considérant que les deux premières colonnes on obtient

1	-2	0
0	1	1
1	-1	0

À l'optimalité, ce tableau devient

0	0	1
0	1	1
1	0	1

$\lambda_1 = -2$ $\quad \hat{X} = (1,1)$

$\lambda_2 = 1$ $\quad$ coût : -1

Voyons s'il est opportun de considérer d'autres variables pour :

la troisième colonne du tableau initial, on a

$$\Pi_3 = 0\cdot(-(-2)) + 1\cdot(-1) = -1 < 0$$

la quatrième colonne du tableau initial, on a

$$\Pi_4 = 1\cdot(-(-2)) + 0\cdot(-1) = 2 > 0$$

la cinquième colonne du tableau initial, on a

$$\Pi_5 = 2\cdot(-(-2)) + 3\cdot(-1) = -1 > 0$$

et on voit que l'on doit considérer la 3e colonne car

$$\Pi_3 = -1 < 0.$$

On forme

1	-2	0	0
0	1	0	1
1	-1	1	0

qui devient à l'optimalité

1	0	0	2
0	1	0	1
1	0	1	1

$\lambda_1 = -2$ $\quad \hat{X} = (0,1,1)$

$\lambda_2 = 0$ $\quad$ coût : -2

Voyons s'il est opportun de considérer d'autres variables. On a pour :

la quatrième colonne du tableau initial, on a

$$\Pi_4 = 1\cdot(-(-2)) + 0\cdot(-0) = 2 > 0$$

la cinquième colonne du tableau initial, on a

$$\Pi_5 = 2\cdot(-(-2)) + 3\cdot(-0) = 3 > 0$$

Comme $\Pi_4 > 0$ et $\Pi_5 > 0$, on a trouvé la solution optimale de notre problème qui est (0,1,1,0,0).

4.2 Nature du sous-problème lorsque le PRF est sous la forme du modèle 2

Tout d'abord, remarquons que si nous voulons utiliser une technique de génération de colonnes dans la modélisation 2 du PRF, le groupe restreint des variables choisies pour la première étape devra comprendre autant de variables z_k^r qu'il y a de tournées (une pour chaque tournée) et, pour simplifier le sous-problème, incluons aussi dans ce groupe restreint toutes les variables $(y_i)_{i\in\{1,..,n\}}$.

Alors la détermination du sous-problème ne portera que sur les colonnes associées aux variables z_k^r.

De plus, on aura plusieurs sous-problèmes. On en aura autant qu'il y a de tournées, mais les sous-problèmes associés à chacune des tournées auront toutes la même forme.

Explicitement, soit la tournée r_0 et l'ensemble N^{r_0} des noeuds de cette tournée. Alors il s'agit de voir si, à la première étape, on peut oui ou non trouver un placement de la tournée r_0 ayant un coût réduit positif. Si c'est le

cas, il faut considérer ce nouveau placement et recommencer. Et on fait cela pour toutes les tournées.

Maintenant, précisons le sous-problème pour la tournée r_0.

Soit les noeuds $(n_0, n_1, \ldots, n_w)$ qui représentent, dans l'ordre de parcours du début vers la fin, de N^{r_0}. Soit $b_{i,i+1}$, l'arc entre le noeud i et le noeud i+1, i = 0,..., w - 1. Et finalement, soit $d_{i,i+1}$, la demande sur l'arc $b_{i,i+1}$. Alors un placement est une suite de noeuds $(n_{t_1}, \ldots, n_{t_q})$ telle que la somme des demandes des arcs entre deux noeuds consécutifs du placement est inférieure ou égale à la capacité C du facteur.

Par exemple, soit la tournée suivante (figure 13), dont la capacité est 5. Le nombre au-dessus de chaque arc est la demande de cet arc.

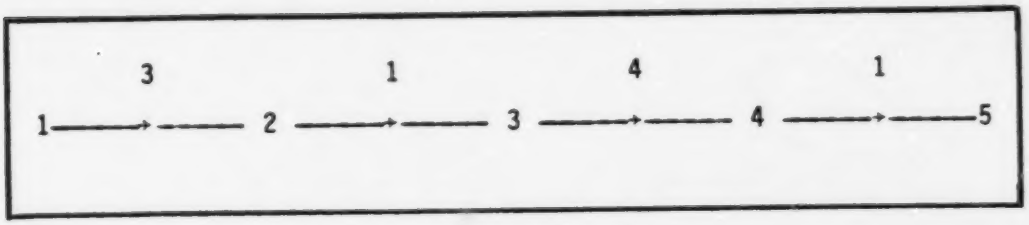

Figure 13 : Tournée

Alors tous les placements possibles sont donnés par l'ensemble de tous les chemins possibles du graphe de la figure 14 ci-dessous pour passer du noeud 1 au noeud 5. Nous appellerons ce graphe le réseau associé à la tournée

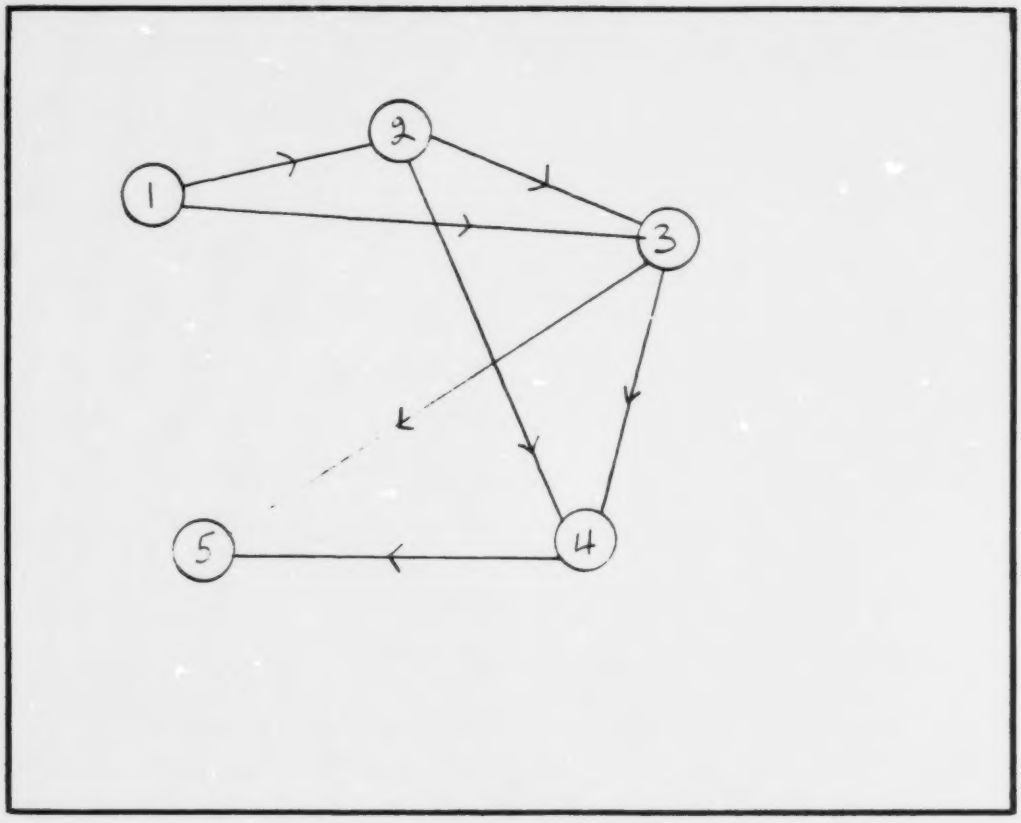

Figure 14 : Chemins possibles contenus dans la tournée de la figure 13

Il y a un arc orienté d'un noeud i vers un autre j s'il est possible de partir de ce noeud i et se rendre au noeud j sans ravitaillement.

Voyons maintenant quel est le coût réduit $\Pi_{p_0}^{y_0}$ de la variable $z_{p_0}^{r_0}$ qui correspond au placement p_0 de la tournée r_0. Si l'on se réfère au modèle 2, on voit que l'on a les contraintes du type (1) et celles du type (2). Alors la colonne correspondant à la variable $z_{p_0}^{r_0}$ se met sous la forme

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ a_{p_0 1} \\ a_{p_0 2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{p_0 n} \end{bmatrix}$$

Partie de la colonne correspondant aux contraintes (1). Il y a un 0 à chaque ligne, sauf pour la ligne de la tournée r_0.

Partie de la colonne correspondant aux contraintes (2) avec

$$a_{p_0 i} = \begin{cases} 1 & \text{si le noeud } i \text{ est utilisé par le placement } p \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

n est le nombre de noeud

Correspondant à $\vec{v}$, on a le vecteur $\vec{\lambda}$ des valeurs des variables duales.

$$\vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{r_0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{|R|} \\ \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

où $|R|$ est le nombre de tournées.

Alors $$\Pi_{p_0}^{r_0} = \vec{v} \cdot (-\vec{\lambda})$$

$$= \mu_{r_0} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, a_{p_0 i}$$

Or comme on veut savoir si on est à l'optimalité, on veut savoir quelle est la plus grande valeur que peut prendre $\Pi_{p_0}^{r_0}$. Comme μ_{r_0} est une constante, on cherche donc à maximiser $(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, a_{p_0 i})$, ou encore à minimiser $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{p_0 i})$ sous la contrainte que $\{a_{p_0 i} \mid i=1,\ldots,n \text{ et } a_{p_0 i} = 1\}$ forme un placement de la tournée r_0. Or un placement de la tournée r_0 est un chemin dans le réseau associé à r_0. Notons que dans ce chemin, si on emprunte un arc pour aller du noeud i vers le noeud j, cela revient à dire que le noeud i est utilisé dans le placement p_0 et qu'alors $a_{p_0 i} = 1$ et c'est comme si le coût pour emprunter cet arc est λ_i.

Il apparaît maintenant évident que

$$\begin{aligned} &\min \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, a_{p_0 i} \\ &\text{sous} \quad \{a_{p_0 i} \mid i=1,\ldots,n \quad \text{et} \quad a_{p_0 i} = 1\} \end{aligned}$$

est un placement de r_0 est équivalent à dire :

résoudre le problème du plus court chemin dans le réseau associé à r_0 où le coût sur chaque arc est la valeur de la variable duale associée à son noeud de départ.

Soit z la valeur de l'objectif pour la solution optimale de ce problème. Alors si $z - \mu_{r_0} < 0$, il faut inclure dans le problème maître la colonne et la variable correspondant au placement qui rend le problème du plus court chemin ci-dessus optimal. Sinon c'est fini.

CHAPITRE 5

RELATION ENTRE LE MODÈLE 2 ET LE MODÈLE 1

Dans cette section, nous nous proposons de montrer que les relaxations linéaires des modèles 1 et 2 sont équivalentes lorsqu'elles sont relaxées de leurs contraintes d'intégrité.

Notons tout de suite que le modèle 2 est équivalent au modèle 2' qui consiste à remplacer les contraintes (2) par les contraintes (2') ci-dessous :

$$(2') \quad \sum_{k \in p^r} a_{ki} \, z_k^r = y_i \quad \begin{matrix} \text{pour tout } r \in R \\ \text{pour tout } i \in N \end{matrix}$$

Le modèle 2 et 2' sont en effet trivialement équivalents, car la solution optimale du modèle 2 satisfait les contraintes (2') à égalité sinon on pourrait obtenir une solution de coût inférieur en diminuant y_ℓ.

Nous allons commencer par réécrire le modèle 2 en une autre formulation équivalente mais auparavant, nous avons besoin d'une définition.

Soit une tournée r avec un noeud i de cette tournée. Si on met un ravitaillement à ce noeud i, alors on peut atteindre sans ravitaillement un certain ensemble E de noeud subséquents à i et dans la trounée r. On appellera sur-arc du noeud i dans la tournée r tout arc qu'on peut tracer du noeud i vers un élément de E. Il est évident qu'un sur-arc n'est pas forcément un arc existant déjà dans la modèle 2.

Par exemple, soit la tournée suivante :

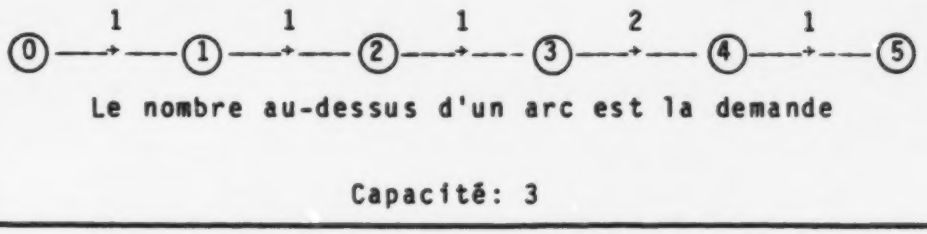

Figure 15 : Tournée

Alors le graphe ci-dessous donne tous les sur-arcs possibles de cette tournée.

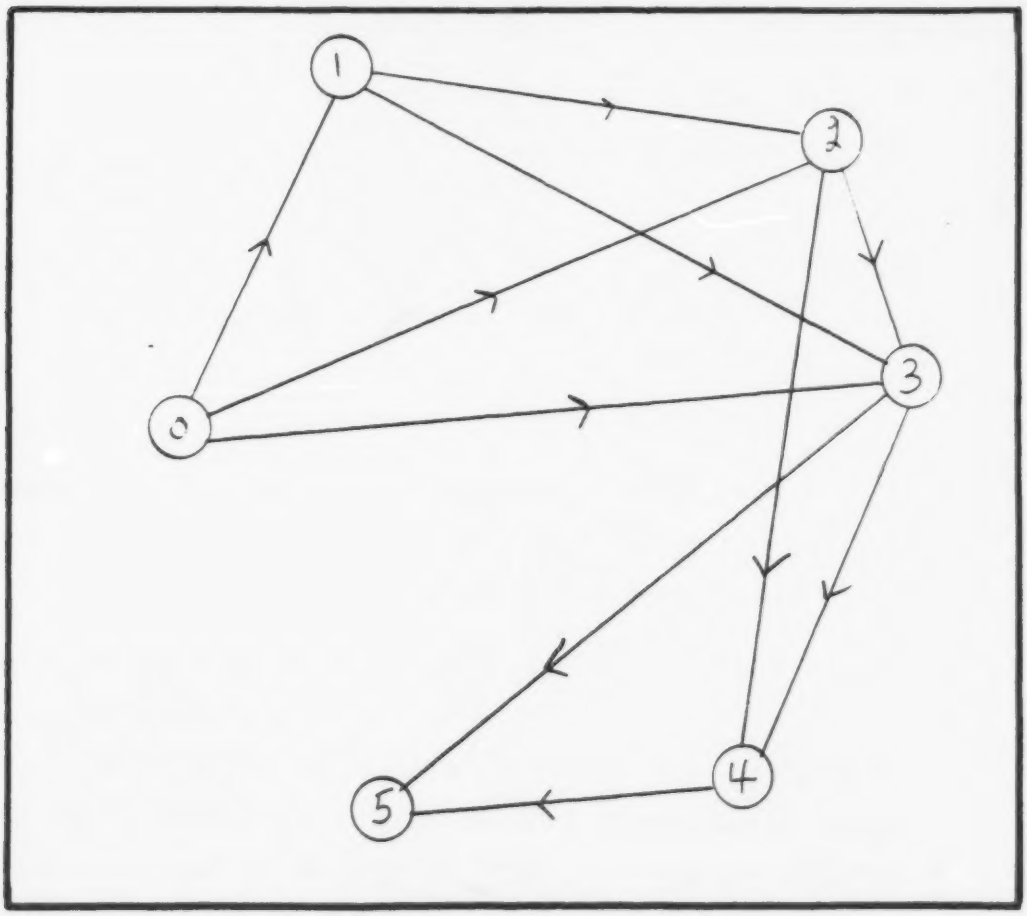

Figure 16 : Sur-arcs associés à la tournée de la figure 15

Alors on peut réécrire le modèle 2 en terme de sur-arcs. Définissons les paramètres dont nous auront besoin.

Le problème comporte n tournées.

S_i : nombre des sur-arcs dans la tournée i, ensemble.

N = {noeuds du PRF}

N^i = {noeuds de la tournée i}

Les variables sont :

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si le noeud } j \text{ est utilisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$x_k^i = 1$ si on prend le sur-arc k de la tournée i, $k \in S_i$ et $1 \leq i \leq n$.

$\Gamma_i(\ell)$ = {sur-arcs de la tournée i partant du noeud ℓ, $\ell \in N^i$}

$\Gamma_i^{-1}(\ell)$ = {sur-arcs de la tournée i arrivant au noeud ℓ, $\ell \in N^i$}

Les constantes sont :

$$b_{k\ell}^i = \begin{cases} 1 & \text{si le noeud } \ell \text{ est le noeud de départ du sur-arc k dans la tournée i, } \ell \in N^i, \\ & k \in S_i, \quad 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

En termes de sur-arcs, on peut maintenant écrire la formulation suivante, qui est le modèle 3.

$$\text{Minimiser} \sum_{i \in N} y_i$$

$$\text{sous (1)} \sum_{k \in \Gamma_i(\ell)} x_k^i - \sum_{k \in \Gamma_i^{-1}(\ell)} x_k^i = \begin{cases} 1 \text{ si } \ell \text{ est le premier noeud de la tournée } i \\ -1 \text{ si } \ell \text{ est de dernier noeud de la tournée } i \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

$$\text{pour tout } \ell \in N^i \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$(2) \sum_{k \in S_i} b_{k\ell}^i \, x_k^i = Y_\ell \qquad \ell \in N^i, \; 1 \leq i \leq n$$

$$(3) \quad 0 \leq x_k^i \leq 1 \qquad k \in S_i, \; 1 \leq i \leq n$$

Les contraintes du bloc (1) sont des contraintes de chemin : en effet, les sur-arcs choisis d'une tournée doivent former un chemin du premier au dernier noeud de cette tournée.

Les contraintes du bloc (2) nous assurent que l'on met bien un ravitaillement (et l'on comptabilise son coût) au noeud ℓ si on utilise un sur-arc ayant le noeud ℓ comme noeud de départ.

Proposition 1 : Les relaxations linéaires des modèles 2' et 3 sont équivalentes.

Démonstration : Les contraintes (2) du modèle 3 lient toutes les variables tandis que les contraintes (1) se séparent par blocs : un pour chaque tournée. En effectuant une décomposition de Dantzig-Wolf, en considérant un sous-

problème pour chaque bloc, on obtient le modèle 2'. En effet, les variables du modèle 2' correspondent aux points extrêmes des sous-problèmes; il s'agit de solutions réalisables entières pour le placement des boîtes à relais pour une tournée. De plus, les contraintes (2') du modèle 2', qui imposent en termes des variables de placement la nécessité de desservir tous les arcs, sont équivalents aux contraintes (2) du modèle 3.

Nous allons maintenant montrer que le modèle 3 est équivalent au modèle 1 mais auparavant, nous aurons besoin de la notion de coupe. Rappelons ce que c'est. Soit un réseau G(N,A) où N={noeuds de G} et A = {arcs de G}. Soit aussi N_1 et N_2, deux ensembles tels que $N_1 \cup N_2 = N$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, N_1 contient le noeud de départ de G et N_2 contient le noeud d'arrivée de G. Alors on dira que l'ensemble des arcs dont le noeud de départ est dans N_1 et celui d'arrivée est dans N_2 forme une coupe de G, notée $K(N_1,N_2)$.

Le flot de la coupe $K(N_1,N_2)$, noté $F(K(N_1,N_2))$, se définit mathématiquement par

$$F(K(N_1,N_2)) = \sum_{(i,j)\in K(N_1,N_2)} x_{ij}$$

où x_{ij} est le flot sur l'arc (i,j). Notons que c'est le flot allant de N_1 à N_2 et non pas le flot de N_1 à N_2 moins celui de N_2 à N_1.

Définition : soit un graphe G(N,A) sans cycle, avec une numérotation des noeuds telle que si $(i,j) \in A$, alors $i < j$. On dira qu'un couple $K(N_1,N_2)$ respecte l'ordre si $(i,j) \in K(N_1,N_2)$ implique que $i < j$.

Introduisons maintenant de nouvelles variables associées aux coupes respectant l'ordre

w_ℓ^i = flot traversant la ℓième coupe respectant l'ordre de la tournée i

$= F\ (K(N_1^\ell, N_2^\ell))$

avec $N_1^\ell = \{i \mid i \in N,\ i < \ell\}$

$N_2^\ell = \{i \mid i \in N,\ i > \ell\}$

Définissons le bloc de contraintes (1')

(1') $w_\ell^i = 1$ pour $\ell \in N^i \setminus \{\text{dernier noeud de la tournée i}\}$

$1 < i < n$

Proposition : Les contraintes du bloc (1) sont équivalentes à celles du bloc (1').

Démonstration : preuve par induction

Donc

$$w_1^i = 1 \text{ est équivalent à } \left(\sum_{k \in \Gamma_i(1)} x_k^i - \sum_{\Gamma_i^{-1}(1)} x_k^i\right) = 1$$

car

$$w_1^i = \sum_{k \in \Gamma_i(1)} x_k^i \quad \text{et} \quad \Gamma_i^{-1}(1) = \emptyset$$

Pour $1 < \ell <$ dernier noeud si $w^i_{\ell-1} = 1$

$$w^i_\ell = 1 \text{ est équivalent à } \left(\sum_{k \in \Gamma_i(\ell)} x^i_k - \sum_{\Gamma^{-1}_i(\ell)} x^i_k \right) = 0$$

Car la figure suivante permet de voir que

$$w^i_\ell = w^i_{\ell-1} + \sum_{k \in \Gamma_i(\ell)} x^i_k - \sum_{k \in \Gamma^{-1}_i(\ell)} x^i_k$$

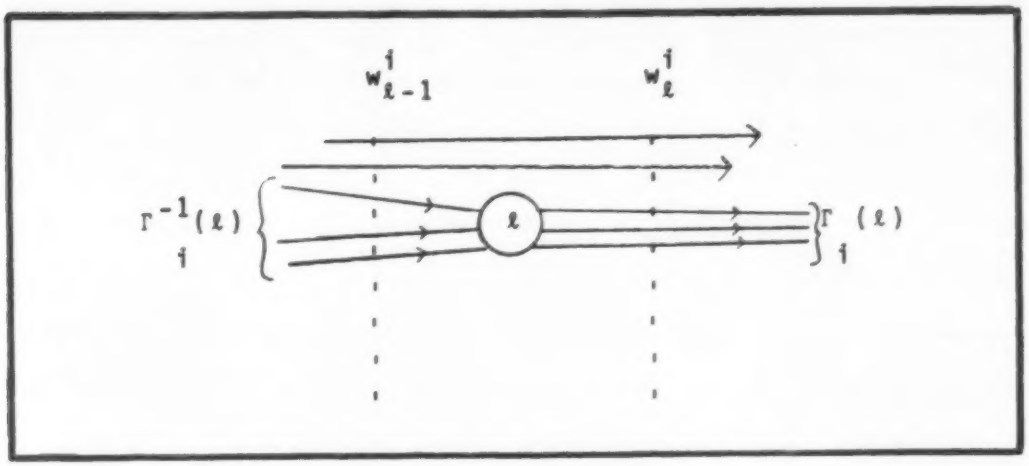

Figure 17 : Les flots ou voisinage du noeud ℓ

Remarquons que la contrainte du bloc (1) pour le dernier noeud est dépendante et s'obtient à partir des autres contraintes de ce bloc.

Le modèle 3' obtenu en remplaçant (1) par (1') est donc équivalent au modèle (3).

Modèle 3'

$$\text{Min} \sum_\ell y_\ell$$

(1') $w^i_\ell(X) = 1$ pour tout $\ell \in N \setminus \{$dernier noeud de la tournée $i\}$

(2) $\sum_{k \in S_i} b^i_{k\ell}\, x^i_k = y_\ell$ pour tout i

(3) $0 \leq x^i_k \leq 1$ pour tout i, pour tout k

Notons que l'argument X a été ajouté dans l'équation (1') pour préciser que w^i_ℓ est la quantité du flot X qui traverse la ℓième coupe. Cette précision devient nécessaire car nous introduisons maintenant un flot $\bar{X}$ et allons considérer $w^i_\ell(\bar{X})$ la quantité du flot $\bar{X}$ qui traverse la ℓième coupe. Le flot $\bar{X}$ se définit à partir des Y_ℓ de la façon suivante :

$$\bar{X}^i_k = \begin{cases} Y_\ell & \text{si k est le plus long sur-arc partant du noeud } \ell \text{ dans la tournée i} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce flot $\bar{X}$ tout comme X satisfait les équations (2); avec $\bar{X}$ nous avons tout comme avec X un flot Y_ℓ qui sort du noeud ℓ mais avec $\bar{X}$ il est concentré sur le plus long arc.

On peut maintenant définir le modèle 4

$$\text{Min} \sum_\ell Y_\ell$$

(1") $w^i_\ell(\bar{X}) \geq 1$ pour tout $\ell \in N \setminus \{$dernier noeud de la tournée i$\}$

$0 \leq Y_\ell \leq 1$

Proposition : Le modèle (3') et le modèle (4) sont équivalents.

Démonstration : Soit (X,Y) est une solution optimale de (3'), le flot $\bar{x}^i_k$, $k \in \Gamma_i(\ell)$ définie à partir de Y_ℓ traverse au moins les mêmes coupes que x^i_k, $k \in \Gamma_i(\ell)$.

Donc

$$W_\ell^i(\bar{X}) > W_\ell^i(X) = 1 \qquad \text{pour tout } \ell \text{ sauf le dernier noeud}$$

D'où $(\bar{X},Y)$ est une solution réalisable du modèle (4) au même coût.

Démontrons maintenant la réciproque. Soit $(\bar{X},Y)$ une solution optimale de (4). La procédure de réduction suivante permettra de définir X à partir de $\bar{X}$.

Si un flot $\hat{X}$ utilise un arc "a" se terminant en ℓ et provenant d'avant $(\ell-1)$ on peut obtenir un flot X avec $1 \leq W_\ell^i(X) < w_\ell^i(\hat{X})$, en transférant en totalité ou en partie le flot de l'arc "a" à l'arc "b" (voir figure 18).

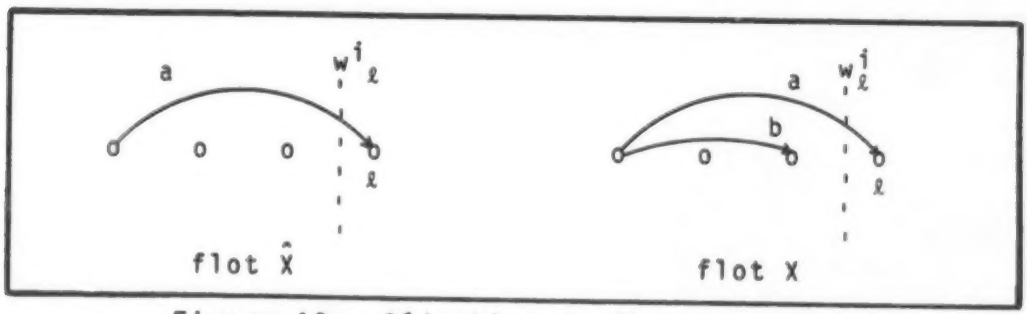

Figure 18 : Réduction du flot à travers la coupe w_ℓ^i

En transférant le flot de cette façon pour un ou plusieurs arcs se terminant en ℓ, on peut atteindre $w_\ell^i(X) = 1$. En effet, on peut enlever tout flot à travers la coupe w_ℓ^i sauf le flot sur l'arc de $\ell-1$ à ℓ et ce dernier flot est inférieur ou égal à $Y_{\ell-1} < 1$.

En utilisant cette réduction de façon récurante sur $\bar{X}$, en commençant avec au dernier noeud, on obtient un flot X tel que $w^i_\ell(X) = 1$ pour tout ℓ. En effet, on peut d'abord l'appliquer avec ℓ étant le dernier noeud car il y a au moins un arc de $\bar{X}$ qui se termine en ℓ car $\sum_{k\in\Gamma^{-1}(\ell)} \bar{x}^i_k = w^i_{\ell-1}(\bar{X}) > 1$. Ensuite, si on a obtenu un flot $\hat{X}$ avec $w^i_j(\hat{X}) = 1$ pour $j > \ell$ et $w^i_{\ell-1}(\hat{X}) > 1$, on peut utiliser cette réduction pour obtenir $w^i_{\ell-1}(X) = 1$ car le flot $\hat{X}$ a un arc se terminant en ℓ. En effet, pour l'équation suivante soit satisfaite, il faut $\Gamma_i^{-1}(\ell) \neq \emptyset$

$$w^i_\ell(\hat{X}) = w^i_{\ell-1}(\hat{X}) + \sum_{k\in\Gamma_i(\ell)} \hat{x}^i_k - \sum_{k\in\Gamma_i^{-1}(\ell)} \hat{x}^i_k$$

Avec ce flot X on obtient une solution (X,Y) du modèle (3') au même coût que la solution optimale $(\bar{X},Y)$ du modèle (4). ■

Proposition : Le modèle (4) est équivalent à la relaxation linéaire (1).

Démonstration : La contrainte (1") du modèle (4) est équivalente à la contrainte (1) du modèle (1).

$$w^i_\ell(\bar{X}) = \sum_s a_{\ell s} \sum_{k\in\Gamma^i(s)} \bar{x}^i_k$$

Rappelons que $a_{\ell s} = \begin{cases} 1 & \text{si le facteur peut en se ravitaillant en s se rendre plus loin que le noeud } \ell \text{ sans ravitaillement subséquent} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Remarquons que $\bar{x}^i_k = 0$ pour $k\in\Gamma^i(s)$ sauf pour le plus long arc. Pour le plus long arc $\bar{x}^i_k = Y_s$.

Donc,

$$w_{\ell}^{i}(\mathfrak{X}) = \sum_{s} a_{\ell s} Y_{s}$$

Ce qui montre l'équivalence. ∎

CONCLUSION

Nous avions, au début, un problème de ravitaillement de facteurs à résoudre. (Notons en passant que ce problème se transpose directement aux problèmes de ravitaillement de navires en mer ou encore d'avions en vol, etc.) Après l'avoir manipulé un peu, on en a dégagé une structure : en effet, on l'a modélisé en un problème de recouvrement. Étant donné sa grande taille, plutôt que de choisir un algorithme exact pour le résoudre, on a opté pour une méthode heuristique, c'est-à-dire un algorithme qui ne nous assure pas d'avoir la solution optimale exacte mais qui devrait quand même fournir une très bonne solution.

Lorsqu'on a résolu un vrai PRF provenant de données réelles, on a alors constaté qu'en effet l'heuristique développée est très performante car le saut d'intégrité est toujours relativement faible (cf. tableau 1). En engendrant des PRF aléatoires, la même conclusion reste valable. En fait, c'est une heuristique assez puissante qui devrait donner de bons résultats pour tous les problèmes de recouvrement en général (Salkin, 1975).

Pour approfondir le sujet, un autre modèle fut développé. Ce dernier nous permet d'utiliser la technique de génération de colonne lorsque le problème original est relaxé de ses contraintes d'intégrité, ce qui est un net avantage sur le premier modèle car on peut obtenir plus aisément une solution, sur laquelle on appliquera l'heuristique, même si le problème est de très (très!) grande taille.

Finalement, on a montré que les deux modèles sont équivalents. C'est un résultat assez théorique en soi, mais qui sait s'il ne pourrait pas servir de point de départ pour d'autres travaux plus pratique lorsqu'un problème de grande taille de ravitaillement se présentera ?

Quoi qu'il en soit, les résultats pratiques que nous avons obtenus montrent que la Société canadienne des postes pourrait sûrement faire des économies en redisposant ses relais sur ses territoires postaux.

Ce qui est intéressant dans ce mémoire, c'est son caractère dual : théorique et pratique. Notons aussi en tout dernier qu'il a été fait sans aucune prétention et avec humilité.

BIBLIOGRAPHIE

BRADLEY, S.P., HAX, A.C. et MAGNANTI, T.L., Applied Mathematical Programming, Addison-Wesley, Reading, chap. 12 (1977).

CHRISTOFIDES, N., Graph Theory: an Algorithmic Approach, Academic Press, New York, 39-46 (1975).

CHURCH, R.L. et WEAVER, J.R., "A Comparison of Solution Procedure for Covering Location Problems", Modeling and Simulation 14, 1417 (1983).

CHURCH, R.L. et WEAVER, J.R., "A Theoretical Links between Median and Coverage Location Problems", Annals of Operations Research 6, 1-19 (1986).

PAPADIMITRIOU, C.H. et STEIGLITZ, K., Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity, Prentice-Hall, Englewood, New Jersey, chap. 15 et 16 (1982).

SALKIN, H.M., Integer Programming, Addison-Wesley, Reading, Mass., chap. 11 (1975).

TOREGAS, C. et ReVELLE, C.S., "Optimal Location under Time or Distance Constraints", Papers of the regional Science Association 18, 133 (1972).

VASKO, F.J. et WILSON, G.R., "An Efficient Heuristic for Large Set Covering Problems", Naval Research Logistic Quarterly 31, 163 (1984).